

***Adaptation dynamique de maillage
pour les lois de conservation hyperboliques
en une dimension***

Maud Mériaux — Serge Piperno

N° 4696

Janvier 2003

THÈME 4



***rapport
de recherche***

Adaptation dynamique de maillage pour les lois de conservation hyperboliques en une dimension

Maud Mériaux^{*}, Serge Piperno[†]

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Caiman

Rapport de recherche n° 4696 — Janvier 2003 — 47 pages

Résumé : Nous proposons ici une méthode d'adaptation dynamique de maillage pour la résolution d'équations hyperboliques, linéaires ou non, stationnaires ou non, en une dimension d'espace. Pour ce faire, nous couplons deux approches souvent alternatives dans la littérature : l'une repose sur des maillages mobiles à topologie constante, l'autre consiste à raffiner, voire déraffiner, localement et dynamiquement le maillage. Cette alliance vient compléter un schéma numérique, fondé sur des formulations en volumes finis des lois de conservation, écrites sur un maillage variable (mobile et à topologie éventuellement variable) avec des flux numériques de type Godunov.

Mots-clés : loi de conservation hyperbolique, volumes finis, maillage mobile, adaptation.

^{*} Projet CAIMAN, email: Maud.Meriaux@sophia.inria.fr

[†] Projet CAIMAN, email: Serge.Piperno@sophia.inria.fr

Dynamic adaptation of grid for one-dimensional hyperbolic conservation laws

Abstract: In this paper, we develop a dynamic self-adaptative mesh method for solving hyperbolic linear or non-linear equations in one space dimension. This method is based on two approaches: the first relies on a moving mesh process without changing mesh topology, the second consists in local and dynamical grid refinement-derefinement. We employ a finite volume scheme based on variable grids (moving and refined) with numerical Godunov-type flows.

Key-words: hyperbolic conservation laws, finite volume, moving mesh, adaptation.

Introduction

Nous présentons ici une méthode d'adaptation dynamique de maillage pour la résolution d'équations hyperboliques, éventuellement non-linéaires, en une dimension. Nous nous intéressons notamment au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x,0) = u^0(x) \end{cases}, \quad (1)$$

où $u(x,t)$ est une fonction scalaire, f une fonction de classe C^1 , u^0 désigne la donnée initiale, $a \leq x \leq b$ et $t \geq 0$. Les indices x et t représentent respectivement des dérivations en espace et en temps.

Les problèmes concrets en Mécanique des Fluides prescrivent souvent un maillage très raffiné dans certaines zones : près des discontinuités, dans les régions importantes de l'écoulement. Suivant l'étendue de ces dernières, en général plus conséquente pour les écoulements instationnaires que stationnaires, le coût de calcul s'avère parfois prohibitif. Il semble alors naturel d'adapter dynamiquement le maillage à la solution afin de le réduire.

La littérature distingue sur le thème de l'adaptation deux philosophies. La première réside dans des remaillages intermédiaires avec extrapolation en général non conservative [7, 28]. Dans la seconde, le nouveau maillage résulte de rénovations de l'ancien via deux options souvent alternatives, que sont le maillage mobile et le raffinement-déraffinement. Suivant la première option, les nœuds du maillage bougent de manière à migrer dans les régions de fortes activités. Pour ce faire, nous disposons de divers outils. Selon P.A. Gnoffo [11], J.T. Batina [1] et B. Palmerio [24, 25], sur chaque nœud s'exerce une force virtuelle, qui dépend des nœuds voisins et qui l'incite à se déplacer dans une direction. E. Dorfy et L. Drury [8], W. Huang et R.D. Russell [17, 18] puis accompagnés par Y. Ren [16], modélisent le mouvement du maillage par une équation aux dérivées partielles, communément appelée MMPDE (Moving Mesh Partial Differential Equation). Malgré la diversité des techniques proposées, nous décelons un point commun, moteur de cette démarche : le principe d'équidistribution. Le maillage est donc le fruit de l'équidistribution d'une fonction de contrôle M . Elle est fréquemment choisie pour mesurer l'erreur numérique entre la solution approchée et la solution exacte. Elle peut toutefois caractériser d'autres grandeurs mathématiques, comme par exemple le gradient. A l'inverse de la première option, la procédure de raffinement-déraffinement influe sur le nombre de points de la discrétisation spatiale. Un critère, souvent motivé par une estimation de l'erreur, décide de l'ajout ou de la suppression des nœuds [5, 21]. L'ajout de points correspond à une volonté de raffiner localement. La suppression permet de réduire le nombre de points "inutiles". Rapidement des variantes ont vu le jour. Nous pouvons citer N. Maman [22] ainsi que F. Benkhaldoun, T. Fernandez, B. Larrouturou et P. Leyland [2], qui opèrent des raffinements hiérarchiques sur des maillages non-structurés, ou encore M.J. Berger avec A. Jameson [3] ou J. Oliger [4], qui raffinent non seulement en espace mais également en temps des maillages structurés.

Notre objectif, outre ce rapport, est de simuler des phénomènes d'interaction fluide-structure. Ils mettent en jeu une structure mobile et un fluide, en écoulement autour ou

contre une partie de la structure. Pour des problèmes où le mouvement de maillage est une nécessité, il serait évidemment judicieux de profiter du déplacement du maillage pour l'adapter. La littérature sur la simulation numérique des interactions fluide-structure s'appuie ainsi très majoritairement sur des maillages mobiles à topologie constante [1, 9, 12, 19]. Nous adoptons également cette démarche à l'originalité près que nous la couplons avec une procédure dynamique de raffinement-déraffinement spatial. Cette alliance vient compléter un schéma numérique, fondé sur des formulations en volumes finis des lois de conservation, écrites sur un maillage variable avec des flux numériques de type Godunov [23]. L'adjonction de l'adaptation au schéma numérique se traduit mathématiquement par différentes techniques. Chacune d'elles souligne plus ou moins l'interaction entre le maillage et la solution. Une approche rigoureuse consiste à considérer le maillage comme une des inconnues du système discret à résoudre [10, 16]. Néanmoins, déterminer simultanément le maillage et la solution est une démarche extrêmement complexe. Une première difficulté réside dans l'augmentation considérable du nombre de variables. A cette remarque, s'ajoute la non-linéarité du système, et ce, même si la loi de conservation est linéaire. Pour des raisons de simplicité, nous envisageons une approche différente, qui dissocie la détermination du maillage de la résolution de l'équation hyperbolique. Dans un premier temps, nous contentant du maillage et de la solution courants, nous cherchons le nouveau maillage. Connaissant son évolution entre deux instants successifs, nous appliquons ensuite le schéma numérique.

Le plan de ce rapport est le suivant. Dans un premier temps, nous présentons l'extension de la méthode de Godunov au maillage mobile pour des lois de conservations scalaires en une dimension d'espace. Nous nous intéressons en particulier à la résolution numérique de l'équation d'advection et de Burgers.

Dans la deuxième partie, nous intégrons le schéma dans un code de volumes finis, où les nœuds se déplacent de manière automatique.

A ce dernier, nous greffons ensuite une procédure de raffinement-déraffinement spatial et nous nous remémorons le schéma écrit en topologie variable, étudié dans un précédent rapport [23]. Les troisième et quatrième sections sont consacrées respectivement à l'addition et à la soustraction de points.

1 Le schéma numérique

Dans cette section, nous présentons l'adaptation de la méthode de Godunov au maillage mobile pour la résolution d'équations hyperboliques en une dimension d'espace. Nous distinguons entre autres, l'advection linéaire ($c \in \mathbb{R}$) :

$$u_t + cu_x = 0 , \quad (2)$$

et l'équation de Burgers, non-linéaire :

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0 . \quad (3)$$

1.1 Méthode des volumes finis

Pour résoudre numériquement (1), nous choisissons une formulation en volumes finis. Le principe fondamental, présenté sur la Figure 1, est le suivant : le domaine spatial est partitionné à tout instant t en cellules, définies en une dimension d'espace par

$$C_i(t) = \left[x_{i-\frac{1}{2}}(t), x_{i+\frac{1}{2}}(t) \right] \quad \text{où} \quad x_{i+\frac{1}{2}}(t) = \frac{x_i(t) + x_{i+1}(t)}{2} .$$

Les nœuds $x_i(t)$ sont supposés connus pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et pour tout $t \geq 0$. Nous considérons que la solution est constante sur ces cellules. Ainsi, les inconnues numériques u_i^n représentent des approximations à l'instant t^n de la moyenne de la solution inconnue u sur la cellule $C_i^n = C_i(t^n)$, soit

$$u_i^n \sim \frac{1}{\Delta x_i^n} \int_{C_i^n} u(x, t^n) dx ,$$

avec

$$\Delta x_i^n = x_{i+\frac{1}{2}}^n - x_{i-\frac{1}{2}}^n \equiv x_{i+\frac{1}{2}}(t^n) - x_{i-\frac{1}{2}}(t^n) > 0 . \quad (4)$$

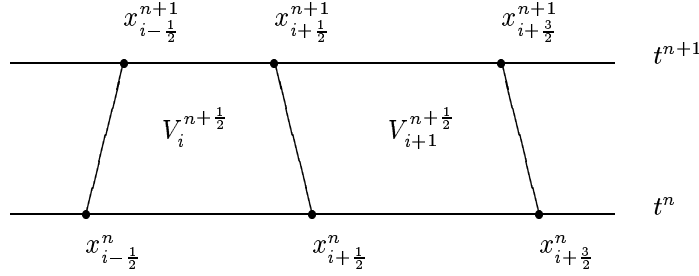


FIG. 1 – Principe des formulations en volumes finis.

Nous supposons également $\dot{x}_i = \frac{\partial x_i(t)}{\partial t} = \text{constante} \forall i \in \mathbb{Z}$ et $\forall t \in [t^n, t^{n+1}]$. Cette hypothèse, couplée à la contrainte de non-retournement des cellules (4), nous garantit que le volume $V_i^{n+\frac{1}{2}}$ est un trapèze. Finalement, nous intégrons l'équation de conservation (1) sur chaque volume $V_i^{n+\frac{1}{2}}$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} & \int_{C_i^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{C_i^n} u(x, t^n) dx \\ & + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(f(u(x_{i+\frac{1}{2}}(t), t)) - \omega_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} u(x_{i+\frac{1}{2}}(t), t) \right) dt = 0 , \\ & - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(f(u(x_{i-\frac{1}{2}}(t), t)) - \omega_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} u(x_{i-\frac{1}{2}}(t), t) \right) dt \end{aligned}$$

où

$$\omega_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^n} \quad \text{et} \quad \Delta t^n = t^{n+1} - t^n .$$

$\omega_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ représente la vitesse moyenne entre les instants t^n et t^{n+1} du point $x_{i+\frac{1}{2}}(t)$.

1.2 Schéma conservatif

Nous utilisons alors un schéma dit conservatif, qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n = 0 .$$

Le flux numérique $\phi_{i+\frac{1}{2}}^n$ approche l'intégrale du flux de la cellule $C_i(t)$ vers la cellule $C_{i+1}(t)$ au cours du pas de temps Δt^n . En général, il est donné par

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) ,$$

où la fonction ϕ est une fonction de flux numérique.

Pour plus de lisibilité, dans la suite de ce rapport, nous omettons les termes exponentiels quand nous évoquons $\phi_{i+\frac{1}{2}}^n$ et $\omega_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$.

1.3 Méthode de Godunov

La méthode de Godunov en maillage mobile [15] est un schéma en volumes finis conservatif dont le flux numérique s'appuie sur un solveur de Riemann exact, c'est-à-dire sur le flux en chaque interface des solutions exactes aux problèmes de Riemann locaux. La fonction de flux numérique s'écrit alors

$$\phi_G(u_g, u_d, \omega) = f(S_R(\omega; u_g, u_d)) - \omega S_R(\omega; u_g, u_d) , \quad (5)$$

où $S_R(x/t; u_g, u_d)$ est la valeur en (x, t) de la solution autosimilaire du problème de Riemann dont les états à gauche et à droite sont u_g et u_d . Par exemple, pour l'équation d'advection (2), le flux de Godunov est donné par

$$\begin{aligned} \phi_G(u_g, u_d, \omega) &= (c - \omega)^+ u_g + (c - \omega)^- u_d \\ \text{avec } \begin{cases} (c - \omega)^+ &= \max(c - \omega, 0) \\ (c - \omega)^- &= \min(c - \omega, 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

et nous prenons pour flux numérique en chaque interface

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_G(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) .$$

Une simple analyse montre que ce schéma explicite est TVD (Total Variation Diminishing) [13, 14] sous la condition de type CFL :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[(c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] \leq 1 .$$

Cette propriété signifie qu'un schéma ne crée pas d'extremum local, il vérifie donc le principe du maximum et n'oscille pas près des discontinuités. Nous remarquons que cette condition de stabilité va se révéler extrêmement restrictive sur le pas de temps Δt^n dès que nous utiliserons des maillages raffinés.

1.4 Schéma localement implicite en temps

Pour s'affranchir de ces restrictions, nous considérons un schéma conservatif

$$\frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}} = 0, \quad (7)$$

où le flux numérique est donné par

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}). \quad (8)$$

Dans l'équation précédente, les variables $u_i^{n+\theta_i}$ sont des inconnues dépendant des grandeurs u_i^n et u_i^{n+1} , et sont déterminées en introduisant les notations suivantes :

$$\forall i, \quad \Delta x_i^{n+\theta_i} = (1 - \theta_i) \Delta x_i^n + \theta_i \Delta x_i^{n+1}, \quad (9a)$$

$$\forall i, \quad \Delta x_i^{n+\theta_i} u_i^{n+\theta_i} = (1 - \theta_i) \Delta x_i^n u_i^n + \theta_i \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1}. \quad (9b)$$

Si $(\forall i, \theta_i = 0)$, nous retrouvons le schéma explicite en temps, qui a fait l'objet de la section précédente. Dès que $(\exists i \mid \theta_i \neq 0)$, le schéma est implicite.

Dans un premier temps, sur l'exemple de l'équation d'advection(2), nous justifions l'utilisation d'un tel schéma par un théorème de stabilité. Nous rappelons ensuite les fondements de la construction d'un schéma implicite linéarisé pour l'équation de Burgers (3). Pour une étude plus détaillée, nous renvoyons le lecteur à [23].

1.4.1 Équation d'advection

Nous appliquons ici le schéma (7-8) muni de la fonction de flux numérique (6) à l'équation d'advection. Effectuant les opérations suivantes :

$$\begin{cases} (1 - \theta_i) \times (7) + \theta_i \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} \\ -\theta_i \times (7) + (1 - \theta_i) \Delta x_i^n u_i^n \end{cases},$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^{n+\theta_i} + \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \left(u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \left(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i} \right) \right], \\ u_i^n &= u_i^{n+\theta_i} - \frac{\theta_i \Delta t^n}{\Delta x_i^n} \left[(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \left(u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \left(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i} \right) \right]. \end{aligned}$$

Afin de déterminer u_i^{n+1} , il nous faut connaître les valeurs $u_i^{n+\theta_i}$. Or, d'après la deuxième égalité, $u^{n+\theta} = (u_i^{n+\theta_i})_i$ est solution d'un système linéaire $Au^{n+\theta} = u^n$. Le système se réduit en fait aux points où $\theta_i \neq 0$. Nous observons également que la matrice A est à diagonale

strictement dominante [23]. Nous utilisons alors une méthode de relaxation pour inverser le système, comme par exemple la méthode de Jacobi.

L'intérêt de ce schéma, localement implicite, réside dans le théorème suivant, dont la démonstration se trouve dans le rapport [23].

Théorème 1 *Sous la condition*

$$\forall n, \forall i, \Delta t^n \left[(c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \frac{(1 - \theta_i)}{\Delta x_i^{n+1}} - (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^- \frac{(1 - \theta_{i-1})}{\Delta x_{i-1}^{n+1}} \right] \leq 1, \quad (10)$$

le schéma mixte (7-8-6) est TVD.

Les problèmes de stabilité liés aux mailles les plus petites pourront alors être évités en prenant $\theta_i = 1$ sur ces cellules.

1.4.2 Équation de Burgers

Pour l'équation de Burgers, les seules solutions entropiques bornées d'un problème de Riemann sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{CHOC} \quad u_g > u_d : u(x,t) &= \begin{cases} u_g & \text{si } \frac{x}{t} < \frac{u_g + u_d}{2} \\ u_d & \text{si } \frac{x}{t} > \frac{u_g + u_d}{2} \end{cases}, \\ \text{DÉTENTE} \quad u_g < u_d : u(x,t) &= \begin{cases} u_g & \text{si } \frac{x}{t} < u_g \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_g < \frac{x}{t} < u_d \\ u_d & \text{si } \frac{x}{t} > u_d \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, le flux de Godunov (5) s'écrit

$$\phi_{\mathcal{G}}(u_g, u_d, \omega) = \frac{1}{2} \max \left((u_g - \omega)^{+2}, (u_d - \omega)^{-2} \right) - \frac{1}{2} \omega^2. \quad (11)$$

Si nous appliquons le schéma (7-8) muni de la fonction de flux numérique (11) à l'équation de Burgers, nous sommes confrontés à la résolution d'un système non-linéaire. Afin de revenir à un système linéaire, nous construisons un schéma implicite linéarisé. Pour ce faire, nous remplaçons dans (7) le flux numérique (8) par

$$\begin{aligned} \phi_{i+\frac{1}{2}} &= \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) + \phi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\ &\quad + \phi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n), \end{aligned}$$

où $\phi'_u(u, v, \omega)$ et $\phi'_v(u, v, \omega)$ désignent respectivement les dérivées par rapport à u et v de $\phi(u, v, \omega)$, ou des approximations de ces dérivées si la fonction de flux numérique ϕ n'est pas dérivable [23].

Dans la section suivante, nous fournissons au schéma une gestion automatique du mouvement du maillage. Dans ce même souci d'auto-adaptation, nous nous intéressons ensuite à l'addition et à la soustraction locales de points et verrons comment étendre le schéma précédemment étudié au maillage à topologie variable. Afin d'illustrer l'efficacité de chaque procédé, nous accompagnons chaque section de résultats numériques sur les exemples de l'équation d'advection et de Burgers.

2 Maillage mobile auto-adaptatif

Nous tentons ici de répondre à la question: "Comment faire bouger les nœuds du maillage?". Malgré la multiplicité des techniques proposées, nous décelons un point commun, moteur de cette démarche: *le principe d'équidistribution*.

Dans le but d'en donner une interprétation mathématique, nous introduisons un changement de coordonnées spatiales. Notons $N + 1$ le nombre de points de discrétisation spatiale. Les coordonnées physiques sont toujours notées $x_i(t)$. Les coordonnées du domaine fictif sont notées $\xi_i = \frac{i}{N}$. Nous définissons le changement de variables des coordonnées fictives vers les coordonnées physiques par $x_i(t) = x(\xi_i, t)$. La transformation $x(\xi, t)$ satisfait le principe d'équidistribution si

$$\int_a^{x(\xi, t)} M(s, t) ds = \xi \cdot \int_a^b M(s, t) ds . \quad (12)$$

La fonction $M(x, t) > 0$ est appelée fonction de contrôle. La distribution des points repose fortement sur le choix de cette fonction. Elle mesure fréquemment, en théorie, l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte. Elle peut toutefois caractériser d'autres grandeurs mathématiques. Un choix usuel consiste à prendre

$$M = \sqrt{1 + |u_x|^2} ,$$

afin de canaliser les nœuds dans les régions de forts gradients. Néanmoins, leur concentration se révèle parfois excessive. Il est alors conseillé d'utiliser une version régularisée, comme par exemple

$$M = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} |u_x|^2} . \quad (13)$$

L'introduction du paramètre $\alpha > 0$ permet de jouer sur l'intensité de la concentration nodale.

W. Huang, Y. Ren et R.D. Russell [16] modélisent le mouvement du maillage par une équation aux dérivées partielles, communément appelée MMPDE (Moving Mesh Partial Differential Equation), obtenue en dérivant par rapport à t et/ou par rapport à ξ , la relation d'équidistribution (12). Ils déterminent ainsi de nombreuses MMPDEs, parmi lesquelles MMPDE1

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(M \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} \dot{x} \right) = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial M}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) ,$$

ou encore MMPDE4

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(M \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} \right) = - \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(M \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) .$$

Le paramètre τ peut être considéré comme un paramètre de relaxation temporelle. A titre indicatif, MMPDE7

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(M \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(M \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} / \frac{\partial x}{\partial \xi} = - \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(M \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)$$

correspond à la méthode de E. Dorfy et L. Drury [8].

Une fois la MMPDE choisie, ils la discrétisent. Ils obtiennent ainsi un système d'équations non-linéaires, qui dépend naturellement des grandeurs x_i^{n+1} , mais aussi des inconnues u_i^{n+1} en raison de la discrétisation de M . Afin de déterminer simultanément le maillage \mathcal{M}^{n+1} et la solution u^{n+1} , ils couplent ce système aux équations issues du schéma numérique, ici aux équations (7-8). Ce procédé, d'une extrême rigueur, souligne la forte interaction entre le maillage et la solution. Sa mise en oeuvre s'avère néanmoins complexe. Une première difficulté réside dans l'augmentation considérable du nombre de variables. D'autre part, l'expérience montre un usage fréquent de schémas temporels totalement implicites, c'est-à-dire $\theta_i = 1 \forall i$ dans (9). A ces remarques, s'ajoute la non-linéarité du système, et ce, même si la loi de conservation est linéaire. Nos efforts pour conserver une démarche linéaire, en particulier la construction du schéma implicite linéarisé pour l'équation de Burgers, deviennent alors inutiles.

Pour des raisons de simplicité, nous souhaitons dissocier la détermination du maillage du calcul de la solution. A ce stade de notre étude, nous disposons uniquement des grandeurs à l'instant t^n . Une méthode simple consiste à adapter le maillage \mathcal{M}^{n+1} à la solution courante u^n . Pour ce faire, nous adoptons le point de vue de J.T. Batina [1] et de B. Palmerio [24, 25], connu dans la littérature sous le nom de "spring analogy". Nous supposons que chaque sommet x_i^n est connecté aux sommets voisins x_j^n par une force, notée F_{ij} . Le nouveau maillage résulte de l'obtention de l'état d'équilibre, qui s'écrit

$$\forall i, \quad \sum_{j | x_j^n \text{ voisin de } x_i^n} F_{ij} = 0 .$$

Ces équations offrent une formulation différente du principe d'équidistribution. En effet, à travers la recherche de l'état d'équilibre, nous cherchons à équirépartir l'ensemble des forces pour chaque sommet. Afin d'atteindre cet objectif, nous proposons une méthode itérative. Nous commençons par initialiser les variables en posant

$$\forall i, \quad x_i^{(0)} = x_i^n \text{ et } u_i^{(0)} = u_i^n .$$

Dans le but d'équidistribuer la fonction de contrôle (13), nous calculons itérativement l'ensemble des forces qui s'appliquent sur chaque sommet $x_i^{(k)}$ de la manière suivante :

$$F_i^{(k)} = \left[\left(x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left(u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)} \right)^2 \right] - \left[\left(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left(u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)} \right)^2 \right] .$$

Notre intention est que pour tout i , $F_i^{(k)} \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. Il faut en fait distinguer plusieurs cas, suivant le signe de $F_i^{(k)}$.

Cas où $F_i^{(k)} > 0$. Il semble logique que le déplacement du nœud $x_i^{(k)}$ traduise une attirance vers $x_{i+1}^{(k)}$, et donc un éloignement de $x_{i-1}^{(k)}$. Nous suggérons alors de poser

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)} ,$$

où le paramètre $\tau_i^{(k)} > 0$ est déterminé à partir des équations suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \left(x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k+1)}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left(u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k+1)}\right)^2 = \left(x_i^{(k+1)} - x_{i-1}^{(k)}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left(u_i^{(k+1)} - u_{i-1}^{(k)}\right)^2, \\ (ii) \quad & u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)} \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}}{x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}}. \end{aligned}$$

L'équation (i) ci-dessus signifie que la valeur recherchée pour $x_i^{(k+1)}$ est telle que la force $F_i^{(k)}$ calculée avec $x_i^{(k+1)}$ à la place de $x_i^{(k)}$ est nulle. La seconde équation (ii) signifie que la valeur $u_i^{(k+1)}$ est simplement interpolée linéairement dans l'intervalle $[x_i^{(k)}; x_{i+1}^{(k)}]$ puisque $F_i^{(k)} > 0$ et le point x_i va se déplacer vers la droite.

Après développement, nous trouvons simplement

$$\tau_i^{(k)} = \frac{1}{2} \frac{x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}}{\frac{1}{\alpha} \left(u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}\right) \left(u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}\right) + \left(x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}\right) \left(x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}\right)}.$$

Proposition 1 Si $F_i^{(k)} > 0$, alors $\tau_i^{(k)} > 0$.

Preuve : l'inégalité se vérifie aisément. Le numérateur étant positif, il nous faut démontrer que le dénominateur $D_i^{(k)}$ l'est également. Nous avons

$$D_i^{(k)} = \left(x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}\right) \left(x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}\right) + \frac{1}{\alpha} \left(u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}\right) \left(u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}\right), \quad (14)$$

que nous pouvons encore écrire sous la forme

$$\begin{aligned} D_i^{(k)} &= \left(x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}\right) \left(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}\right) + \frac{1}{\alpha} \left(u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}\right) \left(u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}\right) \\ &\quad + \left(x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left(u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}\right)^2. \end{aligned}$$

Nous déduisons de l'information $F_i^{(k)} > 0$ que

$$D_i^{(k)} > \frac{1}{2} \left[\left(x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left(u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}\right)^2 \right] > 0.$$

Cas où $F_i^{(k)} = 0$. Les forces étant identiques de part et d'autre du nœud $x_i^{(k)}$, nous proposons de prendre $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)}$ et $u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)}$.

Cas où $F_i^{(k)} < 0$. Le traitement de ce cas est similaire à celui du cas $F_i^{(k)} > 0$. Nous l'obtenons par symétrie. Nous proposons les formules suivantes : si $F_i^{(k)} < 0$, nous posons

$$\begin{aligned} (i) \quad & x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)}, \\ (ii) \quad & u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)} \frac{u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}}, \\ (iii) \quad & \tau_i^{(k)} = \frac{1}{2} \frac{x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}}{\frac{1}{\alpha} (u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}) (u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}) + (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) (x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})} > 0. \end{aligned}$$

Il nous faut désormais vérifier que les nœuds $x_i^{(k+1)}$ sont tels que $x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} > 0$. Nous multiplions alors $\tau_i^{(k)}$ par un paramètre β , compris entre 0 et 1. Explicitement, l'algorithme global se résume ainsi : itérer

$$\begin{aligned} (i) \quad & F_i^{(k)} = \left[(x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)})^2 + (u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)})^2 / \alpha \right] - \left[(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})^2 + (u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)})^2 / \alpha \right]; \\ (ii^+) \quad & \text{si } F_i^{(k)} > 0, \begin{cases} \tau_i^{(k)} = \frac{\beta}{2} \frac{x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}}{(u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)})(u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}) / \alpha + (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)})(x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})} ; \\ u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)} (u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}) / (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}) \end{cases} \\ (ii^-) \quad & \text{si } F_i^{(k)} < 0, \begin{cases} \tau_i^{(k)} = \frac{\beta}{2} \frac{x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}}{(u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)})(u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}) / \alpha + (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})(x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})} ; \\ u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)} (u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}) / (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) \end{cases} \\ (ii^0) \quad & \text{si } F_i^{(k)} = 0, \begin{cases} \tau_i^{(k)} = 0 \\ u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} \end{cases} ; \\ (iii) \quad & x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)}; \end{aligned}$$

jusqu'à ce que $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \text{TOL}$. Nous cherchons sous quelles conditions sur β , les contraintes de non-retournement des cellules sont satisfaites. Nous pouvons montrer la proposition suivante.

Proposition 2 Si $\beta \leq \frac{1}{2}$, alors les cellules du maillage ne se retournent pas.

Preuve : Pour la démonstration, nous différencions quatre cas :

1. si $F_i^{(k)} \leq 0$ et $F_{i+1}^{(k)} \geq 0$, nous avons alors que $x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} \geq x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} > 0$ sans aucune condition supplémentaire sur β ;
2. si $F_i^{(k)} \geq 0$ et $F_{i+1}^{(k)} \geq 0$, nous constatons que

$$x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} \geq x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} - \tau_i^{(k)} F_i^{(k)}.$$

Remplaçant $\tau_i^{(k)}$ par son expression, nous trouvons que

$$x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} \geq (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}) \left[1 - \frac{\beta}{2} \frac{F_i^{(k)}}{D_i^{(k)}} \right],$$

où $D_i^{(k)} > 0$ est donné par l'égalité (14). Etant donné que $0 \leq \beta \leq 1$, nous remarquons que

$$x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} \geq (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{F_i^{(k)}}{D_i^{(k)}} \right].$$

Or, nous avons $2D_i^{(k)} - F_i^{(k)} = \left(x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left(u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)} \right)^2 > 0$. Nous déduisons de cette information que $x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} > 0 \forall \beta$;

3. Si $F_i^{(k)} \leq 0$ et $F_{i+1}^{(k)} \leq 0$, un raisonnement similaire au précédent nous permet de conclure que $x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} > 0$ sans aucune condition sur β ;
4. Nous nous situons ici dans le cadre où $F_i^{(k)} > 0$ et $F_{i+1}^{(k)} < 0$. Nous avons l'égalité suivante :

$$x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} = x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} + \tau_{i+1}^{(k)} F_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)} F_i^{(k)}.$$

Substituant $\tau_i^{(k)}$ et $\tau_{i+1}^{(k)}$ par leur expression, nous obtenons

$$x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} = \kappa (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}),$$

où $\kappa = 1 + \frac{\beta}{2} \frac{F_{i+1}^{(k)}}{D_{i+1}^{(k)}} - \frac{\beta}{2} \frac{F_i^{(k)}}{D_i^{(k)}}$. Or, nous avons $-\frac{F_{i+1}^{(k)}}{D_{i+1}^{(k)}} < 2$ et $\frac{F_i^{(k)}}{D_i^{(k)}} < 2$. Il s'en suit que $\kappa > 1 - 2\beta$. La condition $\beta \leq \frac{1}{2}$ nous garantit dès lors que $x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} > 0$.

Dans la suite de ce rapport, nous posons $\beta = \frac{1}{2}$. Rappelons ici que l'algorithme ci-dessus remplit trois fonctions :

- équirépartition des points;
- interpolation des valeurs de u au cours des itérations (ces valeurs sont utilisées pour l'équidistribution des points, mais pas pour la résolution en temps de l'équation de conservation);
- assurance de non-retournement des volumes finis.

Nous montrons sur la Figure 2 une mise en application de cette méthode, que nous nommons Spring en référence à "spring analogy". Sur le premier graphe sont représentés $(x_i^{(0)}, u_i^{(0)})$ pour $i = 1$ à 50. Les noeuds $x_i^{(0)}$ sont répartis uniformément et $u_i^{(0)} = u(x_i^{(0)})$ avec $u(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$. Sur le deuxième graphe sont représentés $(x_i^{(k)}, u_i^{(k)})$ après convergence de l'algorithme décrit ci-dessus. Il apparaît que les noeuds tendent à se concentrer au voisinage de 0, région de forts gradients.

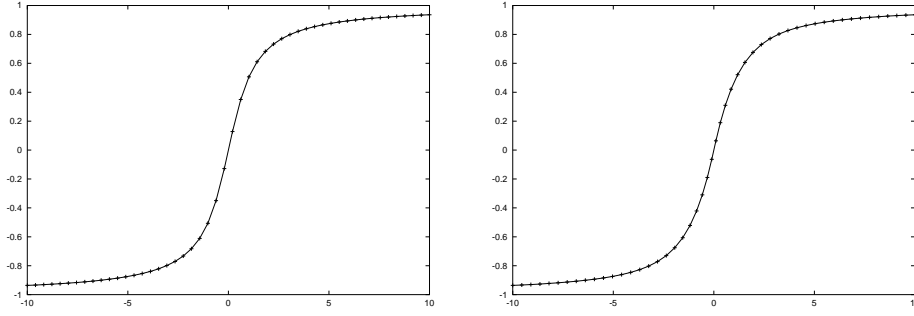
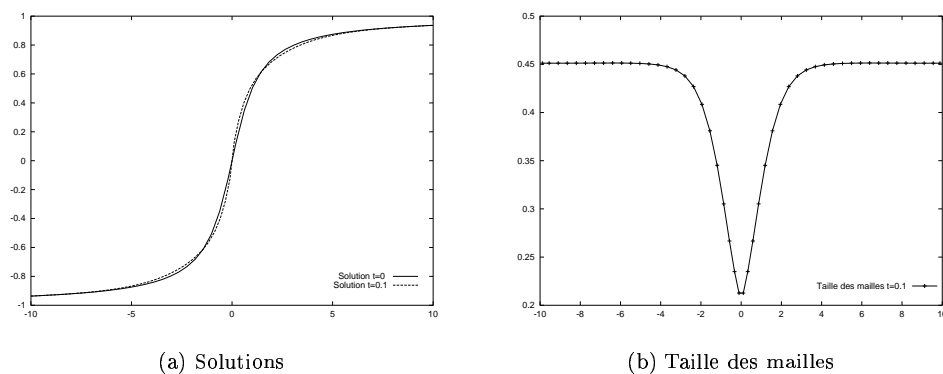
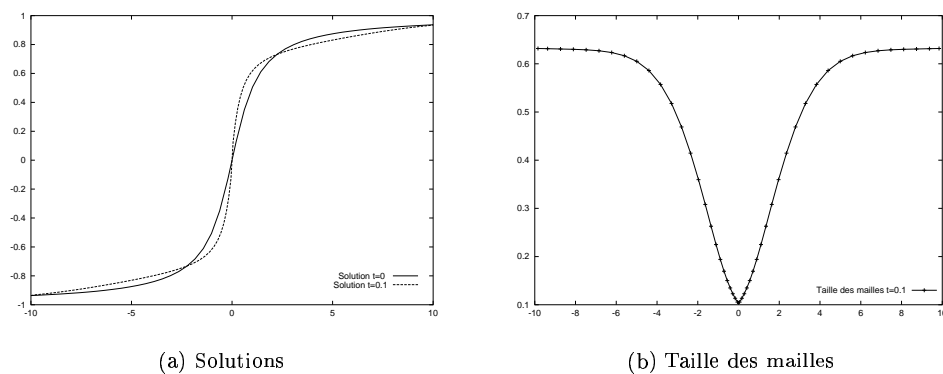
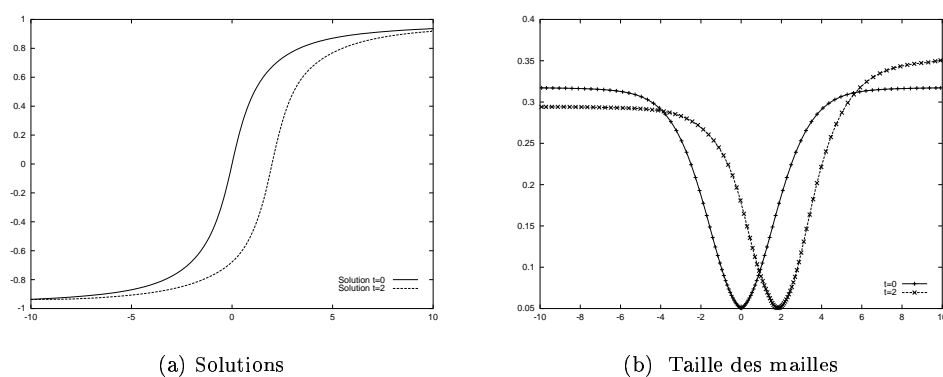
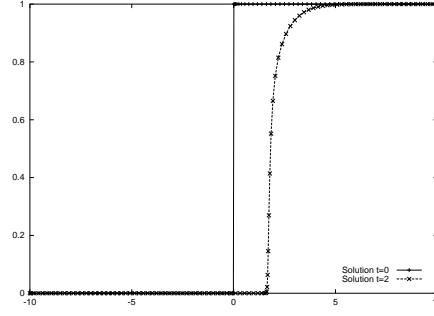


FIG. 2 – Répartition des nœuds générée par Spring avec $\alpha = 0.1$.

Après convergence de l'algorithme, nous posons finalement $x_i^{n+1} = x_i^{(k)}$ pour tout i . Connaissant l'évolution du maillage entre deux instants successifs, il nous reste à appliquer le schéma numérique pour calculer u^{n+1} . Afin d'illustrer son efficacité et l'impact de l'adaptation sur ce dernier, nous présentons quelques résultats numériques. Sur les figures 3(a) et 4(a), nous montrons une itération en temps du schéma (7-8) appliquée à l'équation d'advection $u_t = 0$ avec respectivement $\alpha = 0.1$ et $\alpha = 0.01$ dans Spring. Pour chaque figure, nous avons représenté la solution initiale $u^0(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$ sur un maillage uniforme et la solution à $t = 0.1$. Les figures 3(b) et 4(b) représentent la taille des mailles à $t = 0.1$. Nous remarquons d'ores et déjà que plus α est petit, plus la concentration des nœuds dans les zones décisives est élevée. D'autre part, nous observons, principalement sur la Figure 4(a), que la solution approchée est plus abrupte que la solution initiale. Ce phénomène s'explique par le fait que les nœuds se déplacent dans un souci d'équidistribution de la fonction de contrôle M . La vitesse du maillage ne correspond pas alors à la vitesse du flux, qui dans ce cas précis est nulle puisque $c = 0$. Afin d'atténuer cette différence, nous évitons de choisir le paramètre α trop petit et proposons de prendre \mathcal{M}^0 préalablement adapté à la solution initiale u^0 .

Nous considérons désormais l'équation d'advection (2) avec $c = 1$. Sur la Figure 5(a), nous montrons la solution initiale et la solution à $t = 2$, générée par le schéma numérique (7-8) en prenant un pas de temps Δt^n constant au cours du temps, égal à 0.1. Nous évitons les restrictions sur le pas de temps Δt^n imposées par les conditions de type CFL (10), en posant $\theta_i = 1$ pour tout i . La solution exacte de cette équation étant $u(x, t) = u^0(x - ct)$, l'évolution du maillage, représentée sur la Figure 5(b), semble satisfaisante. Néanmoins, pour des solutions moins régulières, ce processus peut fournir un maillage raffiné dans des régions importantes pour u^n mais sans intérêt pour u^{n+1} . Nous déduisons de cette explication la diffusion numérique observée sur la Figure 6, où la donnée initiale est la fonction de Heaviside. Cette diffusion pourrait être éliminée en raffinant plus abondamment dans une zone assez large. Pour cela, il suffirait de propager les hautes valeurs de la fonction de contrôle M sur une certaine "épaisseur".

FIG. 3 – Solutions et taille des mailles à $t = 0$ et à $t = 0.1$ avec $\alpha = 0.1$.FIG. 4 – Solutions et taille des mailles à $t = 0$ et à $t = 0.1$ avec $\alpha = 0.01$.FIG. 5 – Solutions et taille des mailles à $t = 0$ et à $t = 2$.

FIG. 6 – Solutions à $t = 0$ et à $t = 2$.

Afin d'éviter ce décalage, J.M. Stockie, J.A. Mackenzie et R.D. Russell [27] proposent d'adapter le maillage \mathcal{M}^{n+1} à \tilde{u}^{n+1} , prédiction de la solution recherchée u^{n+1} . Ils suggèrent alors l'algorithme suivant :

MOVING MESH ALGORITHM :

1. $\mathbf{n} = 0$;
2. \mathbf{u}^0 et \mathcal{M}^0 , les données initiales, représentent la solution et le maillage à $t = 0$;
3. Itérations sur \mathbf{n}
 - (a) $\mathbf{m} = 0$;
 - (b) $\mathbf{x}_i^{n+1,0} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t^n \omega_i^n$ tel que $x_i^{n+1,0} - x_{i-1}^{n+1,0} > 0$ (Par exemple, $x_i^{n+1,0} = x_i^n$);
 - (c) Appliquer le schéma numérique $\longrightarrow \mathbf{u}_i^{n+1,0}$;
 - (d) Itérations sur \mathbf{m}
 - i. Adapter le maillage à la solution courante $u_i^{n+1,m}$ (a l'aide, par exemple, de l'algorithme Spring) $\longrightarrow \mathbf{x}_i^{n+1,m+1}$;
 - ii. Appliquer le schéma numérique avec
$$\omega_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,m+1} - x_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^n}$$
et $x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,m+1} = \frac{1}{2}(x_i^{n+1,m+1} + x_{i+1}^{n+1,m+1})$.
 $\longrightarrow \mathbf{u}_i^{n+1,m+1}$;
 - iii. Si $\|x^{n+1,m+1} - x^{n+1,m}\| > \text{TOL}$ alors $\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{m} + 1$ et poursuivre en 3d;
 - (e) $\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^{n+1,m+1}$ et $\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^{n+1,m+1}$;
4. $\mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n} + 1$ et poursuivre en 3.

A chaque itération en temps, cet algorithme a recours au minimum deux fois au schéma numérique: une fois pour l'étape de prédiction, une deuxième fois pour le calcul de la solution à l'instant t^{n+1} . Sans remettre en cause l'efficacité de la méthode, nous craignons un coût élevé en deux et trois dimensions. Nous envisageons, de ce fait, une approche différente, qui consiste à prédire la vitesse optimale du maillage entre les instants t^n et t^{n+1} .

La vitesse d'un choc $s = \frac{dx}{dt}$, dont les valeurs à droite et à gauche sont notées u_d et u_g , est donnée par la relation de Rankine-Hugoniot :

$$f(u_d) - f(u_g) = s(u_d - u_g) . \quad (15)$$

Nous espérons profiter de cette relation pour inciter certains points, que nous qualifions de stratégiques, à se déplacer à la vitesse du choc. Nous dirons qu'un point x_i est stratégique si

$$\cos \alpha_i > K ,$$

où α_i désigne l'angle dessiné sur la Figure 7. En d'autres termes, le nœud x_i est dit stratégique si nous observons en ce dernier un changement de pente considérable. En pratique, nous prenons $K = -\frac{1}{2}$.

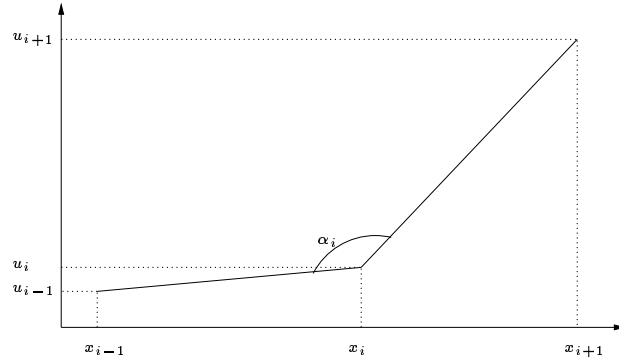


FIG. 7 – Représentation de l'angle α_i

Pour ce faire, notre démarche est la suivante. En premier lieu, nous différencions les nœuds stratégiques des autres. Pour chacun d'entre eux, nous déterminons ensuite quelles sont les valeurs à droite et à gauche du choc. Si le point x_i^n est stratégique, nous proposons de prendre

$$\begin{cases} u_g = u_j^n \text{ tel que } j = \max\{l \mid l < i \text{ et } |u_l^n - u_{l-1}^n| < \epsilon_1\} \\ u_d = u_k^n \text{ tel que } k = \min\{l \mid l > i \text{ et } |u_l^n - u_{l+1}^n| < \epsilon_2\} \end{cases} . \quad (16)$$

Notre objectif est que, pour les nœuds stratégiques, $x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t^n s_i^n$, où s_i^n est donné par la relation de Rankine-Hugoniot (15) et (16). Si nous effectuons naïvement ces affectations, nous risquons de nous heurter aux contraintes de non-retournement des cellules. Afin de les

respecter, nous optons pour une méthode itérative, davantage préventive. Nous commençons par une phase d'initialisation dans laquelle nous posons

$$\begin{aligned} x_i^{n+1,0} &= x_i^n, \\ \delta_i^0 &= 0, \\ \delta_i^{R,0} &= \begin{cases} \Delta t^n s_i^n & \text{si } x_i^n \text{ est stratégique} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

La grandeur $\delta_i^{R,0}$ correspond au déplacement recherché pour le point x_i^n . Nous calculons itérativement le déplacement effectif par une méthode reposant encore sur une analogie élastique. De manière imagée, ce déplacement effectif est calculé en tout point en supposant que le maillage lui-même est la trace d'un matériau élastique (des ressorts, dont la raideur est égale à l'inverse de la longueur des arêtes, relient les points voisins). L'algorithme s'écrit de la manière suivante :

$$\delta_i^m = \frac{\gamma_{i-\frac{1}{2}} \delta_{i-1}^{m-1} + \gamma_i \delta_i^{R,m-1} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \delta_{i+1}^{m-1}}{\gamma_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_i + \gamma_{i+\frac{1}{2}}},$$

où $\gamma_{i-\frac{1}{2}}$, γ_i et $\gamma_{i+\frac{1}{2}}$ sont des fonctions poids, que nous avons choisies indépendantes de m . Elles permettent d'uniformiser le mouvement du maillage. Nous posons précisément

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{x_{i+1}^{n+1,0} - x_i^{n+1,0}}$$

et $\gamma_i = \gamma_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}}$. Nous effectuons ensuite les affectations

$$x_i^{n+1,m} = x_i^{n+1,m-1} + \varepsilon \delta_i^m,$$

avec $\varepsilon = \min_i \varepsilon_{i+\frac{1}{2}}$,

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{i+1}^{m-1} - x_i^{m-1} + \delta_{i+1}^m - \delta_i^m > 0 \\ \eta \frac{x_{i+1}^{m-1} - x_i^{m-1}}{\delta_i^m - \delta_{i+1}^m} & \text{sinon} \end{cases},$$

et η est un paramètre compris entre 0 et 1. L'introduction de la variable ε nous garantit que les cellules ne se retournent pas. Si $\|x^{n+1,m} - x^{n+1,m-1}\| > \text{TOL}$, nous incrémentons m et poursuivons les itérations, sans oublier de réinitialiser $\delta_i^{R,m}$ comme suit

$$\delta_i^{R,m} = \begin{cases} \delta_i^{R,m-1} - \delta_i^m & \text{si } \cos \alpha_i^n > K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Après convergence de la méthode, que nous nommons Info, nous posons finalement $x_i^{n+1} = x_i^{n+1,m}$ et pouvons désormais appliquer le schéma numérique pour calculer u_i^{n+1} .

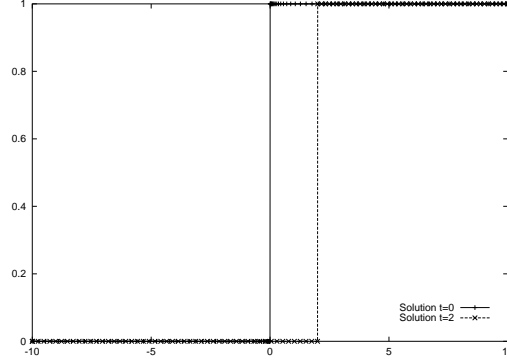
Avant d'illustrer la méthode par des résultats numériques, nous souhaitons ici mettre l'accent sur l'une de ses caractéristiques. Supposons que la solution courante est très régulière. Elle peut, de ce fait, ne posséder aucun point stratégique. L'application de la méthode décrite ci-dessus nous donne alors $x_i^{n+1} = x_i^n$ pour tout i . L'algorithme Spring aurait pour sa part, suscité un déplacement de certains nœuds. L'adaptation n'est certes pas optimale mais a l'avantage de produire une évolution du maillage cohérente avec l'évolution de la solution, comme le montre la Figure 5(b). En résumé, nous avons à notre disposition deux méthodes, l'une qui semble mieux convenir aux solutions régulières, l'autre qui cadre davantage avec les solutions où apparaissent chocs et discontinuités. Afin de traiter un éventail le plus large possible de problèmes, nous proposons de les coupler en une seule, qui s'écrit algorithmiquement comme suit :

NOTRE ALGORITHME :

1. $\mathbf{n} = 0$;
2. \mathbf{u}^0 et \mathcal{M}^0 désignent la solution et le maillage initiaux;
3. Itérations sur \mathbf{n}
 - (a) Repérer les **nœuds stratégiques** et calculer, pour ces derniers, la vitesse recherchée \mathbf{s}_i^n ;
 - (b) Appliquer **Spring** avec $F_i^{(k)} = 0$ si x_i^n est stratégique. Pour ces noeuds, $x_i^{(k)} = x_i^n$ pour tout k .
 $\longrightarrow \mathbf{x}_i^{(k)}$;
 - (c) Appliquer **Info** aux noeuds $x_i^{(k)}$ (Seul changement : $x_i^{n+1,0} = x_i^{(k)}$).
 $\longrightarrow \mathbf{x}_i^{n+1,m}$;
 - (d) $\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^{n+1,m}$;
 - (e) Appliquer le schéma numérique $\longrightarrow \mathbf{u}_i^{n+1}$;
4. $\mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n} + 1$ et poursuivre en 3.

Sur la Figure 8, sont représentées la solution initiale et la solution à $t = 2$ de l'équation d'advection avec $c = 1$, obtenue en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus avec un pas de temps Δt^n constant au cours du temps, égal à 0.1. Les noeuds stratégiques se déplaçant à la vitesse du flux, en particulier ici à la vitesse c , nous observons sur la Figure 8 le bon comportement de la solution approchée. D'autre part, si nous appliquons cet algorithme à la même équation mais avec la donnée initiale $u^0(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$, les résultats seraient alors les mêmes que ceux observés sur les Figures 5(a) et 5(b), puisque la régularité des solutions implique la non-existence de noeuds stratégiques.

Dans le but de valider notre méthode sur des équations non-linéaires, nous considérons le problème de Cauchy (1) pour l'équation de Burgers (3), avec différentes données initiales.

FIG. 8 – Solutions à $t = 0$ et à $t = 2$.

Pour ce choix de la fonction non-linéaire $f(u) = \frac{u^2}{2}$, la relation de Rankine-Hugoniot (15) s'écrit

$$\frac{u_d^2}{2} - \frac{u_g^2}{2} = s(u_d - u_g),$$

c'est-à-dire, si $u_d \neq u_g$,

$$s = \frac{u_d + u_g}{2}.$$

Pour tous les exemples numériques qui suivent, nous appliquons le schéma avec un pas de temps constant au cours du temps, égal à 0.1. Pour éviter les limitations sur le pas de temps imposées par les conditions de type CFL, nous optons pour la version totalement implicite de ce dernier.

Sur la Figure 9(a), nous montrons la solution initiale $u^0(x) = -\frac{x}{1+|x|}$ et la solution approchée à $t = 2$. Du fait de la régularité des solutions, à chaque itération en temps, le maillage \mathcal{M}^{n+1} est uniquement le fruit de la procédure Spring, qui, nous rappelons, adapte \mathcal{M}^{n+1} à la solution courante u^n . Au fur et à mesure des itérations, la solution se raidissant au voisinage de 0, nous observons logiquement sur la Figure 9(b) un raffinement progressif du maillage en ce voisinage.

Sur la Figure 10, nous simulons un choc. A chaque itération en temps, la solution courante possède deux points stratégiques, de part et d'autre du choc. Nous incitons ces derniers à se déplacer à la vitesse $\frac{u_d + u_g}{2}$, en particulier ici $\frac{1}{2}$. La vitesse du maillage étant adéquate, les solutions obtenues via le schéma numérique sont très satisfaisantes.

Sur la Figure 11, nous représentons la solution initiale $u^0(x) = H(x)$, où $H(x)$ est la fonction de Heaviside, et la solution à $t = 2$ générée par notre méthode. La solution initiale possède deux nœuds stratégiques, que nous incitons via Info à se déplacer à la vitesse $\frac{1}{2}$. La vitesse étant inadéquate, le schéma fournit après une itération en temps une solution légèrement diffusée. Aux itérations suivantes, la solution courante ne possède aucun point stratégique à cause de la diffusion du schéma. Donc, seul la procédure Spring opère. Le

maillage \mathcal{M}^{n+1} est alors adapté à la solution courante u^n , et non à u^{n+1} . Nous justifions ainsi la diffusion numérique observée sur la Figure 11.

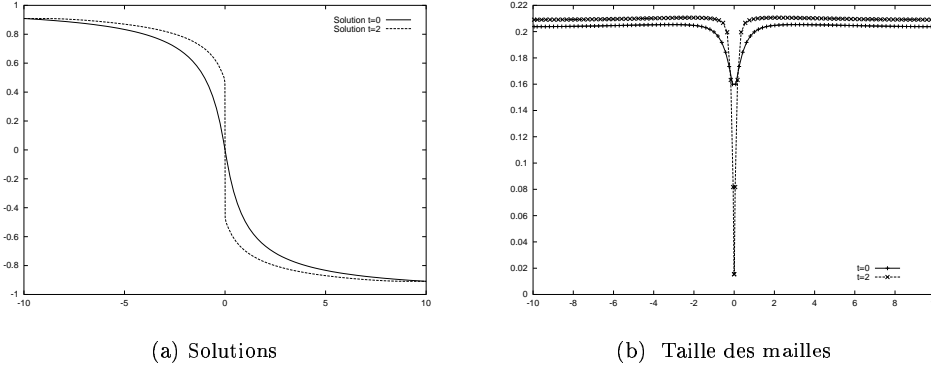


FIG. 9 – Solutions et taille des mailles à $t = 0$ et à $t = 2$.

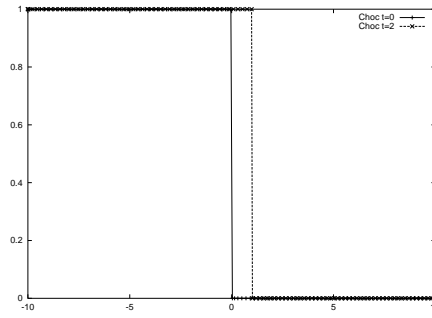
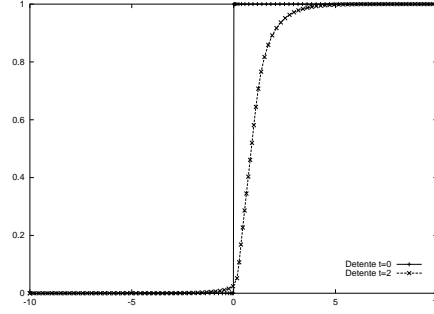


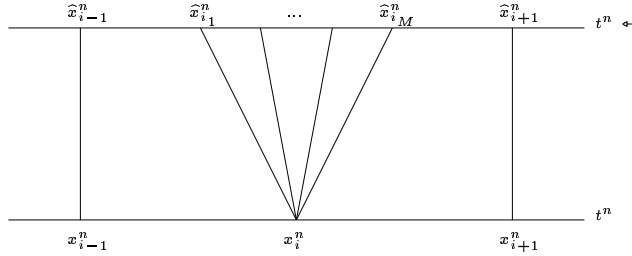
FIG. 10 – Chocs à $t = 0$ et à $t = 2$.

Dans cette section, nous avons présenté une méthode peu originale d'adaptation dynamique de maillage, qui repose sur des maillages mobiles à topologie constante. La littérature sur la simulation numérique des interactions fluide-structure utilise minoritairement un autre procédé, qui consiste à raffiner, voire déraffiner, localement et dynamiquement le maillage. Nous nous intéressons donc dans les sections suivantes à l'addition et à la soustraction locales de points. L'originalité de notre travail réside dans la conception de l'addition et de la soustraction. De cette conception naît une extension du schéma au maillage à topologie variable.

FIG. 11 – *Détentes à $t = 0$ et à $t = 2$.*

3 Addition

Dans un souci d'adaptation, nous nous intéressons ici à l'addition locale de points. A ce stade de notre étude, nous destinons cette procédure à deux usages éventuels: soit elle vient se greffer au mouvement du maillage, soit nous la considérons comme une méthode d'adaptation à part entière. Malgré l'abondance de la littérature sur ce sujet [5, 21], nous remarquons, à notre connaissance, une certaine analogie dans son implémentation. Un critère, souvent motivé par une estimation de l'erreur, décide de l'ajout ou non de nœuds sur le maillage courant \mathcal{M}^n , comme le montre la Figure 12. Les modifications du maillage, s'il y en a, nous amènent à réinitialiser la solution courante u^n , par le biais souvent de l'interpolation. Nous disposons alors d'un maillage $\widehat{\mathcal{M}}^n$ et d'une solution \widehat{u}^n , sur lesquels nous appliquons finalement le schéma numérique.

FIG. 12 – *Addition classique.*

Nous proposons ici une approche originale de par sa mise en œuvre. Nous regardons l'addition comme la division à l'instant t^{n+1} d'un ensemble de points confondus à l'instant t^n . De cette conception, découlent deux variantes, relativement semblables en une dimension mais différentes en dimensions supérieures. L'une est fondée sur les mouvements des

interfaces entre volumes finis, alors que l'autre repose sur les mouvements des sommets à partir desquels sont construits les volumes finis.

- la première approche est représentée sur la Figure 13. En l'interface $x_{i+\frac{1}{2}}^n$ se trouvent une, voire plusieurs cellules de mesure nulle à l'instant t^n et non-nulle à l'instant t^{n+1} .
- la seconde est représentée sur la Figure 14. L'addition est le fait de la distinction à

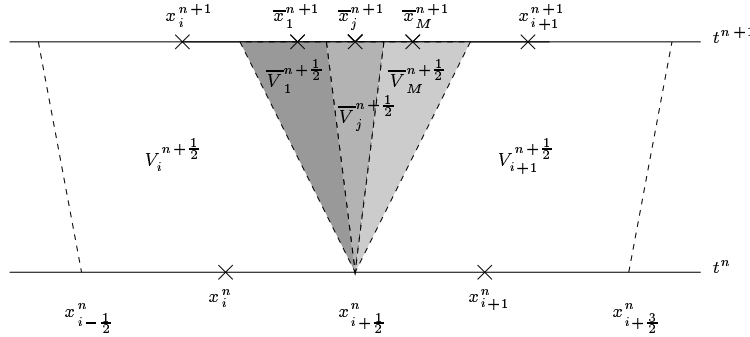


FIG. 13 – Addition basée sur les interfaces.

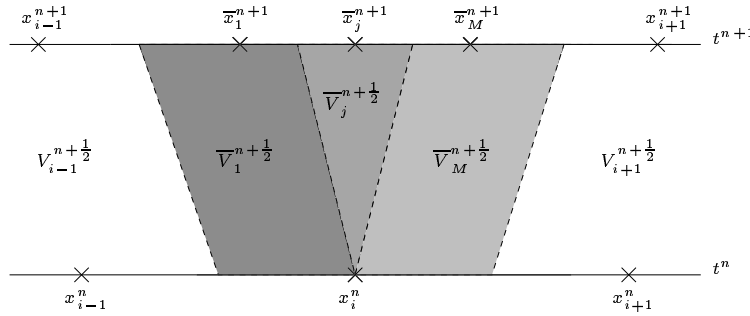


FIG. 14 – Addition basée sur les sommets des cellules.

l'instant t^{n+1} d'un ensemble de M sommets $\bar{x}_1^n, \dots, \bar{x}_M^n$, confondus avec le sommet x_i^n à l'instant t^n . A la différence avec la première optique, les cellules ainsi créées ne sont pas toutes de mesure nulle à l'instant t^n . En effet, nous remarquons que $\Delta \bar{x}_1^n = x_i^n - x_{i-\frac{1}{2}}^n \neq 0$ et $\Delta \bar{x}_M^n = x_{i+\frac{1}{2}}^n - x_i^n \neq 0$.

Suivant l'une ou l'autre des deux stratégies, nous appliquons ensuite un schéma numérique, adaptation du schéma étudié précédemment, qui prend en compte les modifications de la topologie. Nous pensons ainsi éviter les erreurs d'interpolation, qui s'immiscent dans les méthodes classiques. Avant de présenter le schéma numérique, il nous faut faire un choix

parmi les deux méthodes proposées. Dans la perspective d'adapter cette procédure en deux dimensions, il nous semble plus naturel d'opter pour celle qui repose sur les sommets des cellules. D'après la Figure 15, où sont représentés des exemples de cellules centrées aux nœuds (à partir d'une triangulation de type éléments finis), il nous paraît difficile en deux dimensions d'imposer certains mouvements à une interface entre cellules ou de faire coïncider deux interfaces. Il semble plus adapté de gérer les sommets de la triangulation. La situation serait similaire si les volumes finis étaient les triangles eux-mêmes. Il semble plus naturel de gérer des mouvements de sommets que des mouvements de segments entre sommets.

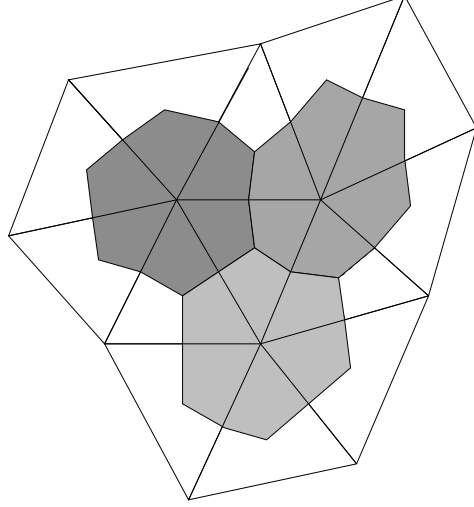


FIG. 15 – *Maillage en deux dimensions.*

Nous nous situons donc dans le cadre précis de la Figure 14, où le nœud x_i^n se subdivise à l'instant t^{n+1} en M sommets, notés $\bar{x}_1^{n+1}, \dots, \bar{x}_M^{n+1}$. Afin de nous remémorer le schéma écrit en topologie variable, nous introduisons ici quelques notations. Nous posons

$$\begin{cases} x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} &= \frac{1}{2}(x_{i-1}^{n+1} + \bar{x}_1^{n+1}) , \\ x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \frac{1}{2}(\bar{x}_M^{n+1} + x_{i+1}^{n+1}) , \\ \bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \frac{1}{2}(\bar{x}_j^{n+1} + \bar{x}_{j+1}^{n+1}) \quad \forall j = 1, \dots, M-1. \end{cases}$$

Nous définissons la taille des mailles comme suit :

$$\begin{cases} \Delta \bar{x}_1^{n+1} &= \bar{x}_{\frac{3}{2}}^{n+1} - x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} , \\ \Delta \bar{x}_j^{n+1} &= \bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \quad \forall j = 2, \dots, M-1, \\ \Delta \bar{x}_M^{n+1} &= x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \bar{x}_{M-\frac{1}{2}}^{n+1} , \end{cases}$$

et déterminons la vitesse du maillage de la manière suivante :

$$\bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_i^n}{\Delta t^n} \quad \forall j = 1, \dots, M-1.$$

Nous notons \bar{u}_j^n et \bar{u}_j^{n+1} l'approximation de u sur respectivement $[\bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^n, \bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^n]$ et $[\bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}, \bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}]$ pour $j = 1, \dots, M$. Dans un premier temps, nous proposons de prendre $\bar{u}_j^n = u_i^n$ pour tout j . D'autre part, nous supposons que $\bar{\omega}_{\frac{3}{2}} \leq \bar{\omega}_{\frac{5}{2}} \leq \dots \leq \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}$ et $\Delta \bar{x}_1^{n+1} > 0$, $\Delta \bar{x}_M^{n+1} > 0$, $\Delta x_j^{n+1} > 0 \quad \forall j$. Nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \Delta x_j^{n+1} &= \Delta x_j^n + \Delta t^n (\omega_{j+\frac{1}{2}} - \omega_{j-\frac{1}{2}}), \quad j \notin \{i-1, i+1\}, \\ \Delta \bar{x}_1^{n+1} &= \Delta \bar{x}_1^n + \Delta t^n (\bar{\omega}_{\frac{3}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}), \\ \Delta \bar{x}_M^{n+1} &= \Delta \bar{x}_M^n + \Delta t^n (\omega_{i+\frac{1}{2}} - \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}), \\ \Delta \bar{x}_j^{n+1} &= \Delta t^n (\bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}), \quad \forall j = 2, \dots, M-1. \end{cases}$$

Comme pour le schéma écrit sur un maillage à topologie constante, nous déterminons les variables $\bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j}$ tel que

$$\begin{aligned} \Delta \bar{x}_j^{n+\bar{\theta}_j} &= (1 - \bar{\theta}_j) \Delta \bar{x}_j^n + \bar{\theta}_j \Delta \bar{x}_j^{n+1}, \\ \Delta \bar{x}_j^{n+\bar{\theta}_j} \bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j} &= (1 - \bar{\theta}_j) \Delta \bar{x}_j^n \bar{u}_j^n + \bar{\theta}_j \Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1}. \end{aligned}$$

Pour $j = 2, \dots, M-1$, étant donné que $\Delta \bar{x}_j^n = 0$, nous avons $\bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j} = \bar{u}_j^{n+1}$. L'adaptation du schéma conservatif (7-8-9) au maillage à topologie non-constante est encore un schéma conservatif de la forme :

$$\frac{\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} - \Delta x_j^n u_j^n}{\Delta t^n} + \phi(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) - \phi(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}}, u_j^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) = 0 \quad \forall j \notin \{i-1, i+1\} \quad (17a)$$

$$\frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^{n+1} - \Delta x_{i-1}^n u_{i-1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \phi(u_{i-2}^{n+\theta_{i-2}}, u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \omega_{i-\frac{3}{2}}) = 0, \quad (17b)$$

$$\frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - \Delta x_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}}, \omega_{i+\frac{3}{2}}) - \phi(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = 0, \quad (17c)$$

$$\frac{\Delta \bar{x}_1^{n+1} \bar{u}_1^{n+1} - \Delta \bar{x}_1^n \bar{u}_1^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_2^{n+\bar{\theta}_2}, \bar{\omega}_{\frac{3}{2}}) - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \quad (17d)$$

$$\frac{\Delta \bar{x}_M^{n+1} \bar{u}_M^{n+1} - \Delta \bar{x}_M^n \bar{u}_M^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(\bar{u}_{M-1}^{n+\bar{\theta}_{M-1}}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}) = 0, \quad (17e)$$

$$\frac{\Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1}}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j}, \bar{u}_{j+1}^{n+\bar{\theta}_{j+1}}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - \phi(\bar{u}_{j-1}^{n+\bar{\theta}_{j-1}}, \bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0 \quad \forall j = 2, \dots, M-1. \quad (17f)$$

Sur l'exemple de l'équation d'advection, nous simplifions le schéma décrit ci-dessus. Nous rappelons ensuite sous quelles conditions, il est TVD. Pour l'équation de Burgers, nous nous contentons de présenter le schéma implicite linéarisé correspondant.

3.1 Équation d'advection

Nous rappelons que pour l'équation d'advection, la fonction de flux numérique de Godunov est donnée par $\phi_G(u_G, u_D, \omega) = (c - \omega)^+ u_G + (c - \omega)^- u_D$. Avant de mentionner sous quelles conditions le schéma (17) muni du flux de Godunov est TVD, nous souhaitons revenir sur son écriture afin d'éventuellement la simplifier.

D'après l'équation (17f), pour $j = 2, \dots, M-1$, autrement dit pour j tel que $\Delta \bar{x}_j^n = 0$, nous avons

$$\frac{\Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1}}{\Delta t^n} + \phi_G(\bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j}, \bar{u}_{j+1}^{n+\bar{\theta}_{j+1}}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - \phi_G(\bar{u}_{j-1}^{n+\bar{\theta}_{j-1}}, \bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0.$$

Utilisant le fait que $\bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j} = \bar{u}_j^{n+1}$ et $\Delta \bar{x}_j^{n+1} = \Delta t^n (\bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})$, nous obtenons

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{(c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^- \bar{u}_{j+1}^{n+\bar{\theta}_{j+1}} - (c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^+ \bar{u}_{j-1}^{n+\bar{\theta}_{j-1}}}{(c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^+}.$$

Nous avons supposé que $\bar{\omega}_{\frac{3}{2}} \leq \bar{\omega}_{\frac{5}{2}} \leq \dots \leq \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}$. Trois cas de figures se présentent :

- Si $c \leq \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}$, nous avons $\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_{j+1}^{n+\bar{\theta}_{j+1}} = \dots = \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}$;
- Si $c \geq \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}$, nous avons $\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_{j-1}^{n+\bar{\theta}_{j-1}} = \dots = \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}$;
- Si $\bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}} < c < \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}$, nous déduisons des deux lignes précédentes que

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{(c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M} - (c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}}{(c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - (c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})}.$$

Ces trois cas de figures peuvent être synthétisés en une unique formule. En effet, nous observons que

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{\left[(c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^+ - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^+ \right] \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1} + \left[(c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^- \right] \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}}{(c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})}. \quad (18)$$

Cette formulation revient en fait, à appliquer, pour $j = 2, \dots, M-1$, le schéma suivant :

$$\frac{\Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1}}{\Delta t^n} + \phi_G(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - \phi_G(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0.$$

Profitant de l'égalité (18), nous pouvons également remplacer les équations (17d) et (17e) par respectivement

$$\frac{\Delta \bar{x}_1^{n+1} \bar{u}_1^{n+1} - \Delta \bar{x}_1^n \bar{u}_1^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{\frac{3}{2}}) - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0,$$

$$\frac{\Delta \bar{x}_M^{n+1} \bar{u}_M^{n+1} - \Delta \bar{x}_M^n \bar{u}_M^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}) = 0.$$

dans le schéma (17). Pour résumer, appliquer le schéma (17) muni de la fonction de flux numérique de Godunov (6) à l'équation d'advection, équivaut à appliquer le schéma suivant :

$$\frac{\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} - \Delta x_j^n u_j^n}{\Delta t^n} + \phi(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) - \phi(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}}, u_j^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\forall j \notin \{i-1, i+1\}, \quad (19a)$$

$$\frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^{n+1} - \Delta x_{i-1}^n u_{i-1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \phi(u_{i-2}^{n+\theta_{i-2}}, u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \omega_{i-\frac{3}{2}}) = 0, \quad (19b)$$

$$\frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - \Delta x_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}}, \omega_{i+\frac{3}{2}}) - \phi(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = 0, \quad (19c)$$

$$\frac{\Delta \bar{x}_1^{n+1} \bar{u}_1^{n+1} - \Delta \bar{x}_1^n \bar{u}_1^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{\frac{3}{2}}) - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \quad (19d)$$

$$\frac{\Delta \bar{x}_M^{n+1} \bar{u}_M^{n+1} - \Delta \bar{x}_M^n \bar{u}_M^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}) = 0, \quad (19e)$$

$$\frac{\Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1} - \Delta \bar{x}_j^n \bar{u}_j^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\forall j = 2, \dots, M-1. \quad (19f)$$

Comme dans la première section, nous voudrions savoir sous quelles conditions le schéma (19) muni du flux de Godunov est TVD. Dans un précédent rapport [23], nous avons formulé ces conditions pour le schéma où l'addition s'appuie sur les interfaces. Par un raisonnement analogue, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 2 *Sous les conditions*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) \quad \forall j \notin \{i-1, i\}, & \Delta t^n \left[(c - \omega_{j+\frac{1}{2}})^+ + \frac{1-\theta_{j+1}}{\Delta x_{j+1}^{n+1}} - (c - \omega_{j+\frac{1}{2}})^- - \frac{1-\theta_j}{\Delta x_j^{n+1}} \right] \leq 1, \\ (ii) & \Delta t^n \left[(c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ + \frac{1-\bar{\theta}_1}{\Delta \bar{x}_1^{n+1}} - (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^- - \frac{1-\theta_{i-1}}{\Delta x_{i-1}^{n+1}} \right] \leq 1, \\ (iii) & \Delta t^n \left[(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ + \frac{1-\theta_{i+1}}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} - (c + \omega_{i+\frac{1}{2}})^- - \frac{1-\bar{\theta}_M}{\Delta \bar{x}_M^{n+1}} \right] \leq 1, \\ (iv) & -\Delta t^n (c - \bar{\omega}_{\frac{3}{2}})^- - \frac{1-\bar{\theta}_1}{\Delta \bar{x}_1^{n+1}} \leq 1, \\ (v) & \Delta t^n (c - \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}})^+ + \frac{1-\bar{\theta}_M}{\Delta \bar{x}_M^{n+1}} \leq 1, \end{array} \right.$$

le schéma en maillage mobile avec ajout de points (19) est TVD.

Dans un premier temps, nous nous contentons d'ajouter des noeuds sans faire bouger le maillage. Par exemple, considérant que $|u_i^n - u_{i+1}^n|$ est grand, nous décidons de l'addition à l'instant t^{n+1} de deux noeuds entre x_i^n et x_{i+1}^n , répartis uniformément, l'un confondu avec x_i^n à l'instant t^n , l'autre avec x_{i+1}^n . Le maillage ainsi généré est schématisé sur la Figure 16.

Sur la Figure 17, nous avons représenté la solution initiale et la solution approchée après seulement une itération en temps du schéma pour l'équation d'advection $u_t = 0$. Nous remarquons sur la solution approchée la présence de marches. Nous l'expliquons par le fait

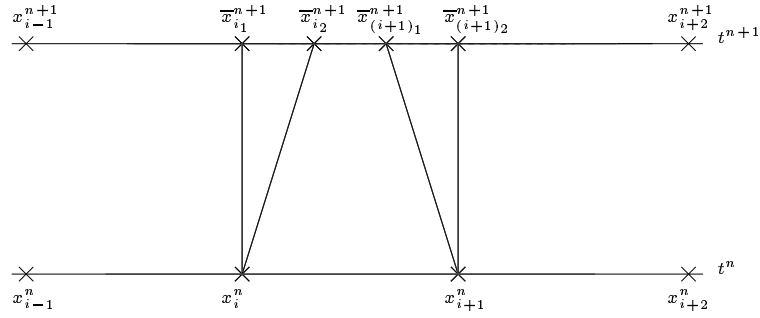
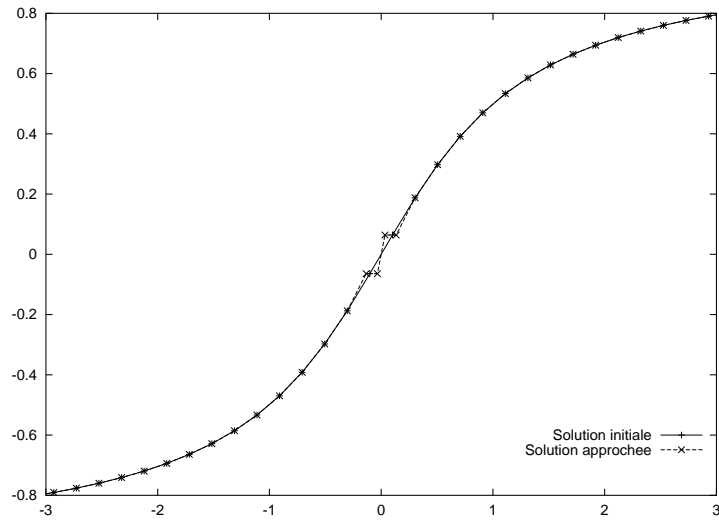


FIG. 16 – Addition "uniforme".

FIG. 17 – Solutions à $t = 0$ (100 nœuds) et à $t = 0.1$ (102 nœuds).

qu'en l'interface $\bar{x}_{j+\frac{1}{2}}$, la méthode de Godunov résout un problème de Riemann, dont les états à gauche et à droite sont égaux à l'instant t^n . En effet, nous avons posé $\bar{u}_1^n = \bar{u}_M^n = u_i^n$.

Nous n'aurions pas rencontré cette difficulté si nous avions choisi de raisonner sur les interfaces. Si nous nous plaçons dans le cadre de la Figure 13, l'adaptation du schéma (7-8-9) au maillage à topologie non-constante s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} - \Delta x_j^n u_j^n}{\Delta t^n} + \phi(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) - \phi(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}}, u_j^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) &= 0 \\ \forall j \notin \{i, i+1\}, \\ \frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \bar{\omega}_{\frac{1}{2}}) - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^{n+\theta_i}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) &= 0, \\ \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - \Delta x_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}}, \omega_{i+\frac{3}{2}}) - \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}}) &= 0, \\ \frac{\Delta x_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1} - \Delta x_j^n \bar{u}_j^n}{\Delta t^n} + \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) &= 0 \\ \forall j = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

En chaque interface, le schéma résout également un problème de Riemann, où cette fois les états à gauche et à droite sont distincts. Malgré cette remarque, nous persistons dans notre choix dans l'optique du passage à plus d'une dimension en espace, qui, nous le rappelons, consiste à opérer sur les sommets du maillage.

Pour remédier au problème de marches, il faut donc affecter d'autres grandeurs que u_i^n à \bar{u}_1^n et \bar{u}_M^n . Pour ce faire, nous écrivons \bar{u}_1^n et \bar{u}_M^n comme une combinaison linéaire de u_{i-1}^n , u_i^n et u_{i+1}^n , soit

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^n &= \lambda u_{i-1}^n + \mu u_i^n + \nu u_{i+1}^n, \\ \bar{u}_M^n &= \lambda' u_{i-1}^n + \mu' u_i^n + \nu' u_{i+1}^n. \end{aligned} \quad (20)$$

Nous demandons aux inconnues $\lambda, \nu, \mu, \lambda', \nu'$ et μ' de conserver certaines propriétés intrinsèques :

- préservation de la conservativité du schéma; en d'autres termes, il leur est demandé d'être tels que $\Delta x_i^n u_i^n = \Delta \bar{x}_1^n \bar{u}_1^n + \Delta \bar{x}_M^n \bar{u}_M^n$. Nous obtenons alors les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \Delta \bar{x}_M^n \lambda' + \Delta \bar{x}_1^n \lambda = 0, \\ \Delta \bar{x}_M^n \nu' + \Delta \bar{x}_1^n \nu = 0, \\ \Delta \bar{x}_M^n (\mu' - 1) + \Delta \bar{x}_1^n (\mu - 1) = 0. \end{cases}$$

- préservation d'un champ constant; si $u_{i-1}^n = u_i^n = u_{i+1}^n$, il semble légitime de vouloir que $\bar{u}_1^n = u_i^n$, ce qui se traduit par la condition suivante :

$$\lambda + \mu + \nu = 1.$$

- préservation d'un champ linéaire; si

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\frac{\Delta x_{i-1}^n + \Delta x_i^n}{2}} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\frac{\Delta x_i^n + \Delta x_{i+1}^n}{2}} = \nabla,$$

nous voulons que

$$\frac{\bar{u}_1^n - u_{i-1}^n}{\frac{\Delta x_{i-1}^n + \Delta \bar{x}_1^n}{2}} = \frac{u_{i+1}^n - \bar{u}_M^n}{\frac{\Delta \bar{x}_M^n + \Delta x_{i+1}^n}{2}} = \nabla,$$

autrement dit

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^n &= u_i^n - \frac{\Delta \bar{x}_M^n}{2} \nabla, \\ \bar{u}_M^n &= u_i^n + \frac{\Delta \bar{x}_M^n}{2} \nabla.\end{aligned}\tag{21}$$

Si nous identifions les termes en u_{i-1}^n pour \bar{u}_1^n dans les expressions (20) et (21), nous avons alors que

$$\lambda(\Delta x_{i-1}^n + \Delta x_i^n) - \nu(\Delta x_i^n + \Delta x_{i+1}^n) = \Delta \bar{x}_M^n.$$

Pour déterminer les inconnues $\lambda, \nu, \mu, \lambda', \nu'$ et μ' , nous disposons donc de trois équations

$$\begin{cases} \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu'-1}{\mu-1} = -\frac{\Delta \bar{x}_M^n}{\Delta \bar{x}_M^n}, \\ \lambda + \mu + \nu = 1, \\ \lambda(\Delta x_{i-1}^n + \Delta x_i^n) - \nu(\Delta x_i^n + \Delta x_{i+1}^n) = \Delta \bar{x}_M^n. \end{cases}$$

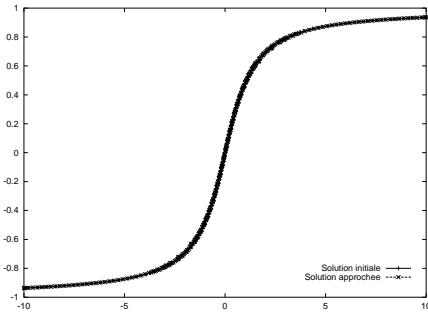
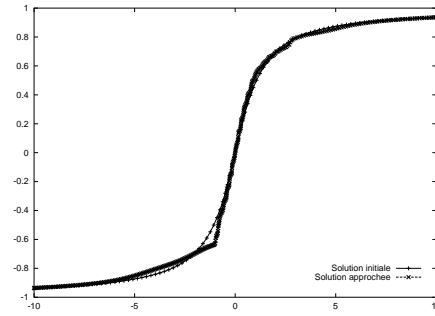
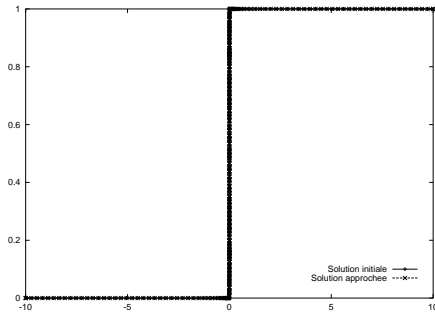
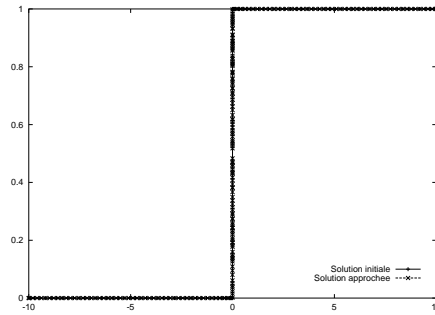
Nous proposons de poser $\mu = 1$. En résolvant le système écrit ci-dessus, nous trouvons facilement que

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^n &= u_i^n - \frac{\Delta \bar{x}_M^n}{\Delta x_{i-1}^n + 2\Delta x_i^n + \Delta x_{i+1}^n} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \\ \bar{u}_M^n &= u_i^n + \frac{\Delta \bar{x}_M^n}{\Delta x_{i-1}^n + 2\Delta x_i^n + \Delta x_{i+1}^n} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)\end{aligned}\tag{22}$$

Les Figures 18(a), 19(a), 20(a) et 21(a) montrent la solution initiale sur un maillage composé de 100 nœuds et la solution approchée générée par le schéma (19) et (22). Comme précédemment, nous nous contentons d'ajouter deux nœuds uniformément entre les sommets x_i^n et x_{i+1}^n , fixes au cours du temps, si $|u_{i+1}^n - u_i^n|$ est jugé grand. En particulier, nous choisissons comme critère : $|u_{i+1}^n - u_i^n| \geq \text{cste} \times \text{TV}$, où TV désigne la variation totale moyenne de la solution courante. D'autre part, afin d'éviter une surabondance de points, nous ajoutons une contrainte, qui est que $x_{i+1}^n - x_i^n \geq \Delta x^{\min}$. Les Figures 18(a) et 19(a) sont consacrées à la résolution de l'équation d'advection avec $c = 0$ et les données initiales respectives $u^0(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$ et $u^0(x) = H(x)$, alors que les Figures 20(a) et 21(a) illustrent les résultats pour l'équation d'advection avec $c = 1$ et les mêmes données initiales.

Une autre approche consiste à considérer l'addition comme complément au maillage mobile auto-adaptatif. Pour ce faire, nous proposons la démarche suivante : En premier lieu, un critère décide de l'ajout éventuel de points. Supposons que le nœud x_i^n se subdivise à l'instant t^{n+1} en M ($M \geq 1$) nœuds, notés $\bar{x}_1^{n+1}, \dots, \bar{x}_M^{n+1}$. A chaque \bar{x}_j^{n+1} , nous associons une grandeur \bar{x}_j^n , que nous considérons comme la position du point à l'instant t^n . Par une interpolation, nous calculons ensuite \bar{u}_j^n , qui correspond à une estimation de la solution u^n en ce point. Nous appliquons alors l'algorithme Spring+Info, décrit dans la section précédente, afin de déterminer la position des nœuds \bar{x}_j^{n+1} . Il nous reste finalement à appliquer le schéma numérique. Les Figures 18(b), 19(b), 20(b) et 21(b) illustrent cette démarche. Les Figures 18(b) et 20(b) sont consacrées à la résolution de l'équation d'advection avec respectivement $c = 0$ et $c = 1$, où la donnée initiale est $u^0(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$. Nous avons alors choisi de poser $\alpha = 0.1$ dans la mise en œuvre de l'algorithme Spring. Il en est de même pour les Figures 19(b) et 21(b) à la différence que la donnée initiale est la fonction de Heaviside et avons pris $\alpha = 0.01$. Le fait de faire bouger les points provoque quelques instabilités,

principalement observables sur les Figures 18(b) et 20(b). Sur la Figure 22, nous avons représenté les solutions obtenues après une itération en temps avec et sans adaptation. Avec adaptation, les nœuds, y compris ceux résultant de l'addition, se déplacent dans un souci d'équidistribution. Or, certains ont tendance à s'éloigner des régions où leur addition semble légitime d'après nos critères. Nous justifions ainsi les irrégularités observées. Nous proposons alors de proscrire le déplacement des points issus de l'addition. Pour ces derniers, nous posons $F_i^{(k)} = 0$ dans l'algorithme Spring. Les figures 23, 24, 25 et 26 représentent les résultats obtenus avec cet artifice.

(a) Sans : 100 nœuds \rightarrow 356 nœuds(b) Avec : 100 nœuds \rightarrow 352 nœudsFIG. 18 – *Solution initiale et solution approchée.*(a) Sans : 100 nœuds \rightarrow 404 nœuds(b) Avec : 100 nœuds \rightarrow 212 nœudsFIG. 19 – *Solution initiale et solution approchée.*

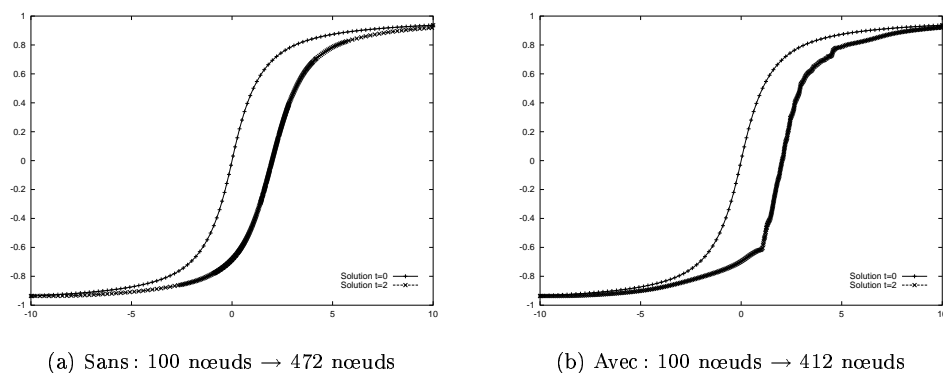
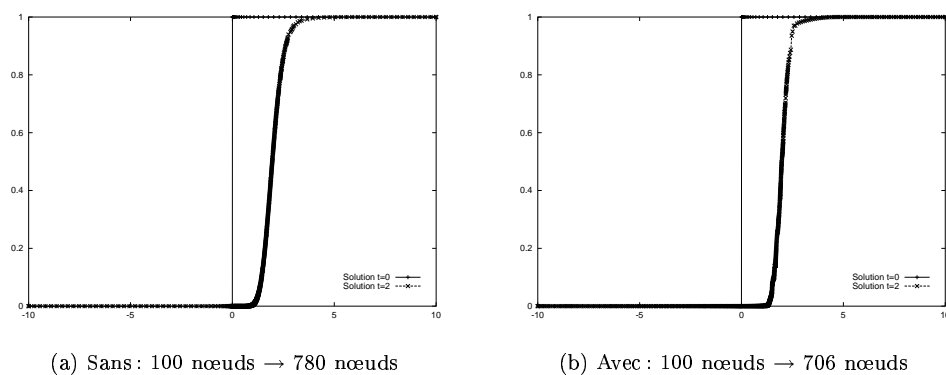
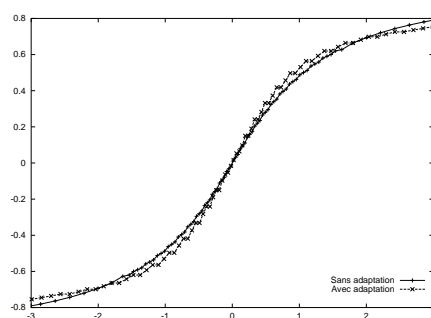
FIG. 20 – Solutions à $t = 0$ et $t = 2$.FIG. 21 – Solutions à $t = 0$ et $t = 2$.

FIG. 22 – Solutions après une itération en temps.

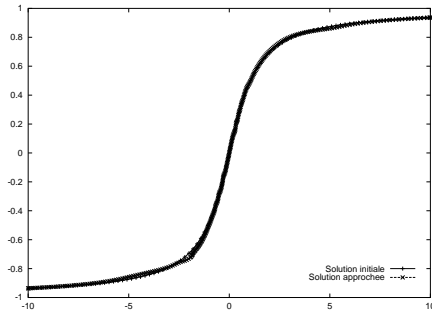


FIG. 23 – *Solution initiale (100 nœuds) et solution approchée (316 nœuds).*

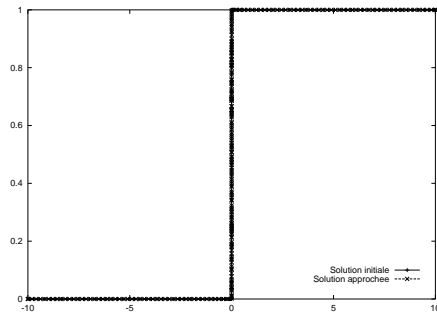


FIG. 24 – *Solution initiale (100 nœuds) et solution approchée (254 nœuds).*

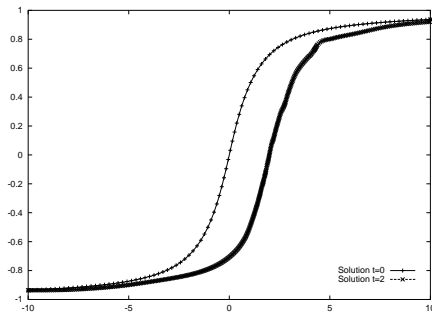


FIG. 25 – *Solutions à $t = 0$ (100 nœuds) et $t = 2$ (418 nœuds).*

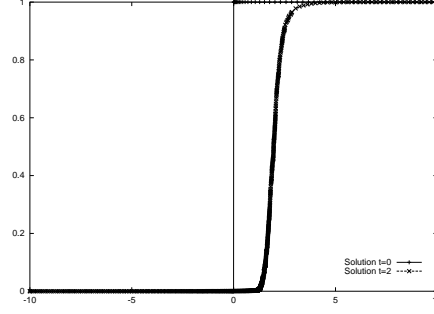


FIG. 26 – Solutions à $t = 0$ (100 nœuds) et $t = 2$ (748 nœuds).

3.2 Équation de Burgers

Nous nous contentons ici d'écrire le schéma implicite linéarisé correspondant à (19) sur l'exemple de l'équation de Burgers. Il consiste à considérer les itérations de la forme :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} - \Delta x_j^n u_j^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}}, u_j^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) = 0 \\
 & \quad \forall j \notin \{i-1, i+1\}, \\
 & \frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^{n+1} - \Delta x_{i-1}^n u_{i-1}^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(u_{i-2}^{n+\theta_{i-2}}, u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \omega_{i-\frac{3}{2}}) = 0, \\
 & \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - \Delta x_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}}, \omega_{i+\frac{3}{2}}) - \mathcal{F}(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = 0, \\
 & \frac{\Delta \bar{x}_1^{n+1} \bar{u}_1^{n+1} - \Delta \bar{x}_1^n \bar{u}_1^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{\frac{3}{2}}) - \mathcal{F}(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \\
 & \frac{\Delta \bar{x}_M^{n+1} \bar{u}_M^{n+1} - \Delta \bar{x}_M^n \bar{u}_M^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}) = 0, \\
 & \frac{\Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1} - \Delta \bar{x}_j^n \bar{u}_j^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0 \\
 & \quad \forall j = 2, \dots, M-1,
 \end{aligned}$$

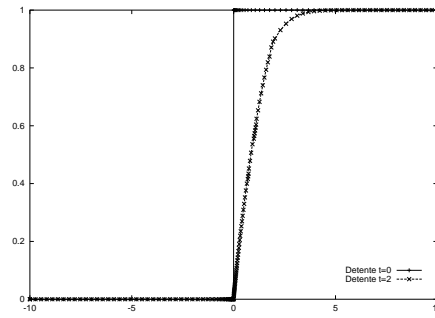
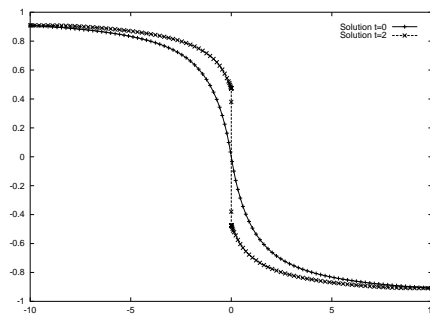
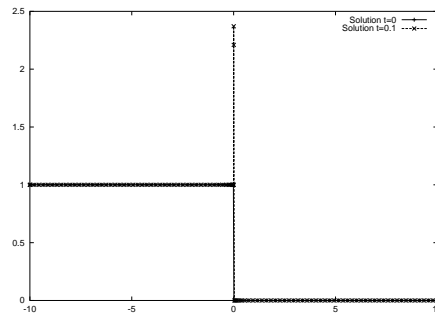
avec

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) &= \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) + \psi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\
 & \quad + \psi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n),
 \end{aligned}$$

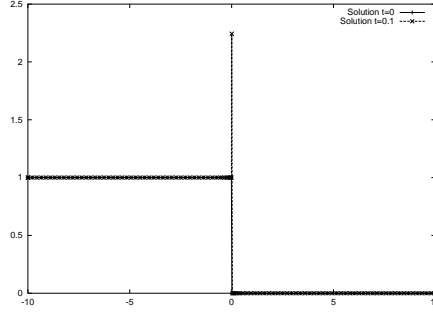
où ϕ est la fonction de flux numérique de Godunov et la fonction ψ est soit la fonction de flux numérique de Engquist-Osher, soit la version entropique du flux de Roe [23].

Comme pour l'advection, nous ajoutons au préalable des nœuds uniformément, c'est-à-dire sans faire appel aux procédures Spring et Info. Les résultats ainsi obtenus sont présentés sur les Figures 27 et 28, où les données initiales sont respectivement $u^0(x) = H(x)$ et $u^0(x) = -\frac{x}{1+|x|}$.

Lorsque la donnée initiale est $u^0(x) = 1 - H(x)$, nous observons après seulement une itération en temps des instabilités, imagées en la Figure 29. Or, nous remarquons que ces

FIG. 27 – *Détentes à $t = 0$ (100 nœuds) et $t = 2$ (146 nœuds).*FIG. 28 – *Solutions à $t = 0$ (100 nœuds) et $t = 2$ (124 nœuds).*FIG. 29 – *Solutions à $t = 0$ (100 nœuds) et $t = 0.1$ (102 nœuds).*

instabilités se produisent également sans addition de points. En effet, nous montrons sur la Figure 30 une itération en temps de notre schéma sur un maillage fixe à topologie constante.

FIG. 30 – Solutions à $t = 0$ et $t = 0.1$.

Nous rappelons que le schéma implicite linéarisé correspondant à (7-8-9) s'écrit alors pour tout j

$$\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} = \Delta x_j^n u_j^n - \Delta t^n \left(\mathcal{F}(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}}, u_j^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) \right), \quad (23)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) &= \phi_{\mathcal{G}}(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}}) + \psi'_u(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}})(u_j^{n+\theta_j} - u_j^n) \\ &\quad + \psi'_v(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}})(u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}} - u_{j+1}^n). \end{aligned}$$

Effectuons l'opération $-\theta_j \times (23) + (1 - \theta_j) \Delta x_j^n u_j^n$. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} &\left[\Delta x_j^n + \Delta t^n \theta_j \left(\psi'_u(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}}) + \omega_{j+\frac{1}{2}} - \psi'_v(u_{j-1}^n, u_j^n, \omega_{j-\frac{1}{2}}) - \omega_{j-\frac{1}{2}} \right) \right] (u_j^{n+\theta_j} - u_j^n) \\ &- \Delta t^n \theta_j \psi'_u(u_{j-1}^n, u_j^n, \omega_{j-\frac{1}{2}})(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}} - u_{j-1}^n) + \Delta t^n \theta_j \psi'_v(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}})(u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}} - u_{j+1}^n) \\ &= \Delta t^n \theta_j \left[\phi_{\mathcal{G}}(u_{j-1}^n, u_j^n, \omega_{j-\frac{1}{2}}) + \omega_{j-\frac{1}{2}} u_j^n - \phi_{\mathcal{G}}(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}}) - \omega_{j+\frac{1}{2}} u_j^n \right]. \end{aligned}$$

Le vecteur $\delta^n = (\delta_j^n)_j = (u_j^{n+\theta_j} - u_j^n)_j$ est donc solution d'un système linéaire $A \delta^n = b$. Notons $A = (a_{j,k})_{j,k}$ et $b = (b_j)_j$. Utilisant le fait que $\omega_{j-\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall j$, nous avons

$$\begin{cases} a_{j,k} &= 0 \text{ pour } k < j-1 \text{ ou } k > j+1, \\ a_{j,j} &= \Delta x_j^n + \Delta t^n \theta_j (\psi'_u(u_j^n, u_{j+1}^n, 0) - \psi'_v(u_{j-1}^n, u_j^n, 0)), \\ a_{j,j-1} &= -\Delta t^n \theta_j \psi'_u(u_{j-1}^n, u_j^n, 0), \\ a_{j,j+1} &= \Delta t^n \theta_j \psi'_v(u_j^n, u_{j+1}^n, 0), \\ b_j &= \Delta t^n \theta_j (\phi_{\mathcal{G}}(u_{j-1}^n, u_j^n, 0) - \phi_{\mathcal{G}}(u_j^n, u_{j+1}^n, 0)). \end{cases}$$

Nous proposons de prendre $\psi = \phi_{\mathcal{EO}}$, où $\phi_{\mathcal{EO}}$ désigne la fonction de flux numérique de Engquist-Osher, qui s'écrit en maillage mobile comme suit :

$$\phi_{\mathcal{EO}}(u_g, u_d, \omega) = \frac{1}{2}(u_g - \omega)^+{}^2 + \frac{1}{2}(u_d - \omega)^-{}^2 - \frac{1}{2}\omega^2.$$

Nous déduisons de cette expression que $\frac{\partial \phi_{\mathcal{E}} \varphi}{\partial u_g} = (u_g - \omega)^+$, $\frac{\partial \phi_{\mathcal{E}} \varphi}{\partial u_d} = (u_d - \omega)^-$. Remplaçant ϕ_g , ψ'_u et ψ'_v par leurs expressions, nous trouvons

$$\begin{cases} a_{j,k} &= 0 \text{ pour } k < j-1 \text{ ou } k > j+1, \\ a_{j,j} &= \Delta x_j^n + \Delta t^n \theta_j |u_j^n|, \\ a_{j,j-1} &= -\Delta t^n \theta_j (u_{j-1}^n)^+, \\ a_{j,j+1} &= \Delta t^n \theta_j (u_{j+1}^n)^-, \\ b_j &= \frac{\Delta t^n \theta_j}{2} \left(\max \left((u_{j-1}^n)^{+2}, (u_j^n)^{-2} \right) - \max \left((u_j^n)^{+2}, (u_{j+1}^n)^{-2} \right) \right). \end{cases}$$

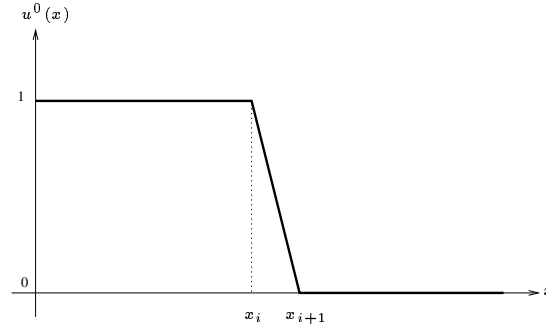


FIG. 31 – choc.

Nous nous situons ici dans le cadre précis de la Figure 31. La matrice A et le vecteur b s'écrivent alors

$$\begin{aligned} a_{j,j-1} &= \begin{cases} -\Delta t^n \theta_j & \text{si } 2 \leq j \leq i+1 \\ 0 & \text{si } i+2 \leq j \leq N \end{cases}, \\ a_{j,j} &= \begin{cases} \Delta x_j^n + \Delta t^n \theta_j & \text{si } 1 \leq j \leq i \\ \Delta x_j^n & \text{si } i+1 \leq j \leq N \end{cases}, \\ a_{j,j+1} &= 0 \quad \forall j = 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

et

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+1 \\ \frac{\Delta t^n \theta_{i+1}}{2} & \text{si } j = i+1 \end{cases}.$$

La résolution du système linéaire nous donne

$$\delta_j^n = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+1 \\ \frac{\theta_{i+1}}{2} \frac{\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^n} & \text{si } j = i+1 \end{cases}.$$

Dans l'implémentation du schéma, nous avons choisi $\theta_j = 1 \quad \forall j$. Nous avons alors

$$u_j^{n+1} = u_j^{n+\theta_j} = u_j^n + \delta_j^n = \begin{cases} u_j^n & \text{si } j \neq i+1 \\ u_j^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^n} & \text{si } j = i+1 \end{cases}.$$

Les instabilités, observées sur la Figure 30, proviennent donc du $(i + 1)^{\text{ème}}$ terme, en particulier du second membre b , non nul, en ce point. Si nous prenons un pas de temps dix fois plus petit, autrement dit égal à 0.01, elles tendent à disparaître, comme le montre la Figure 32.

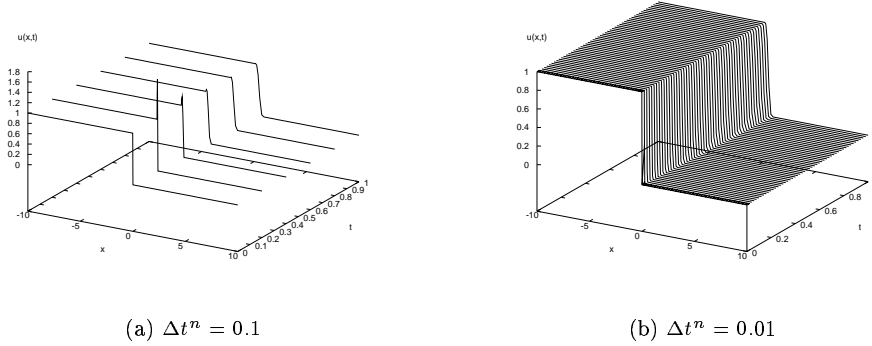


FIG. 32 – Solutions en fonction du temps.

Nous greffons désormais l'addition au maillage mobile. La technique est la même que pour l'advection. Les résultats ainsi obtenus sont présentés sur les Figures 33 et 34, où les données initiales sont respectivement $u^0(x) = H(x)$ et $u^0(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$.

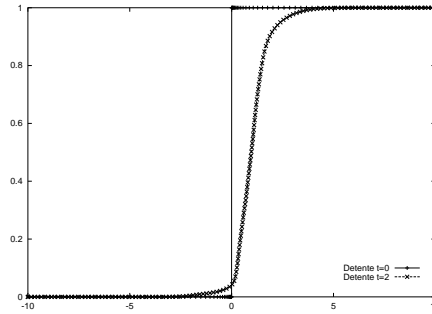
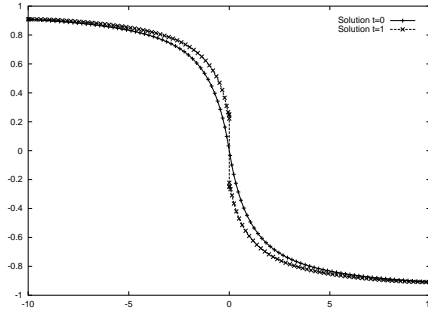


FIG. 33 – Détentes à $t = 0$ (100 nœuds) et $t = 2$ (164 nœuds).

Dans cette section, nous nous sommes intéressés à l'addition locale de points et avons présenté un schéma numérique cohérent avec notre conception de l'addition. L'ajout de points correspond à une volonté de raffiner localement le maillage. Si nous observons les Figures 8, 10 ou encore 24, nous remarquons des populations relativement importantes de nœuds dans des régions de faible activité. C'est pourquoi, nous consacrons la section suivante à la soustraction, dont le but est de réduire le nombre de points "inutiles".

FIG. 34 – Solutions à $t = 0$ (100 nœuds) et $t = 1$ (108 nœuds).

4 Soustraction

Nous étudions ici la soustraction. Dans la littérature, son implémentation est similaire à celle de l'addition, que nous avons qualifiée de classique. Un critère décide de la suppression d'une cellule sur le maillage courant \mathcal{M}^n , comme le schématise la Figure 35. La solution courante est alors réinitialisée sur le nouveau maillage $\hat{\mathcal{M}}^n$ par le biais de l'interpolation. Nous disposons donc d'un maillage $\hat{\mathcal{M}}^n$ et d'une solution \hat{u}^n , sur lesquels nous appliquons finalement le schéma numérique.

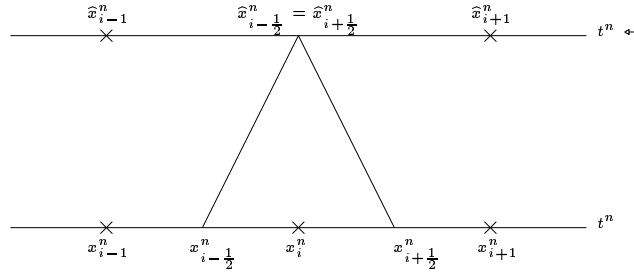


FIG. 35 – Soustraction classique.

Nous proposons une approche différente, dont la conception s'apparente à celle de l'addition, présentée dans la section précédente. Nous voyons la soustraction comme la fusion à un certain temps de deux interfaces.

Nous nous situons donc dans le cadre précis de la Figure 36, où les interfaces $x_{i-1/2}^n$ et $x_{i+1/2}^n$ se rencontrent à l'instant t^{n+1} pour n'en former qu'une seule. Cette fusion a pour effet la suppression de la cellule \mathcal{C}_i^n à l'instant t^{n+1} . Le schéma (7-8) nous donne une contrainte

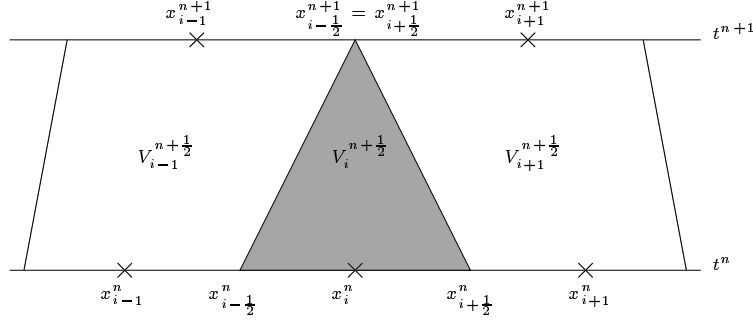


FIG. 36 – Fusion de deux points-interfaces.

forte sur les vitesses des points convergents, à savoir

$$\omega_{i-\frac{1}{2}} - \omega_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x_i^n}{\Delta t^n} > 0. \quad (24)$$

Pour un pas de temps, nous considérons le schéma suivant :

$$\frac{\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} - \Delta x_j^n u_j^n}{\Delta t^n} + \phi(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_j+1}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) - \phi(u_{j-1}^{n+\theta_j-1}, u_j^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) = 0$$

$$j \notin \{i-1, i, i+1\}, \quad (25a)$$

$$\frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^{n+1} - \Delta x_{i-1}^n u_{i-1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^*, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \phi(u_{i-2}^{n+\theta_{i-2}}, u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \omega_{i-\frac{3}{2}}) = 0, \quad (25b)$$

$$\frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - \Delta x_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}}, \omega_{i+\frac{3}{2}}) - \phi(u_i^*, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = 0, \quad (25c)$$

avec $\theta_j \in [0, 1]$, $\Delta x_j^{n+\theta_j}$ et $u_j^{n+\theta_j}$ définis par (9) pour $j \neq i$. Nous avons en outre $\Delta x_i^{n+1} = 0$, ce qui implique $\Delta x_i^{n+\theta_i} = (1 - \theta_i) \Delta x_i^n$ et $u_i^{n+\theta_i} = u_i^n$. Nous choisissons u_i^* tel que

$$-\frac{\Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi(u_i^*, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^*, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0. \quad (26)$$

La valeur fictive u_i^* peut être interprétée comme une valeur de u_i^{n+1} . D'autre part, le schéma conserve ainsi sa forme générale, y compris pour la cellule qui disparaît au cours du pas de temps.

Comme dans la section concernant l'addition de points, nous évoquons, dans un premier temps, les propriétés de ce schéma muni du flux numérique de Godunov sur l'équation d'advection et présentons ensuite le schéma implicite linéarisé correspondant pour l'équation de Burgers.

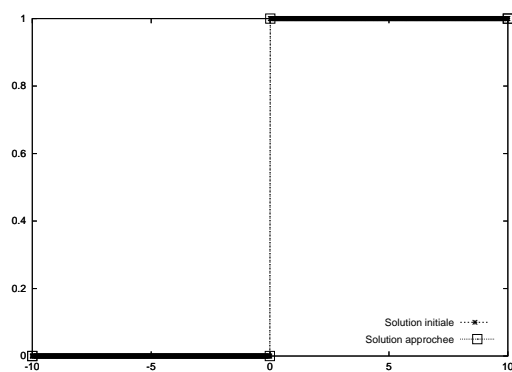


FIG. 37 – *Solution initiale (1000 nœuds) et solution approchée (4 nœuds).*

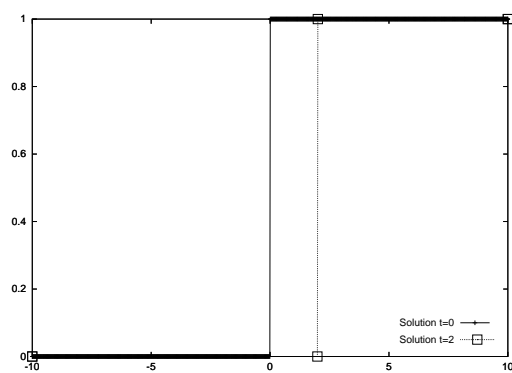


FIG. 38 – *Solutions à $t = 0$ (1000 nœuds) et $t = 2$ (4 nœuds).*

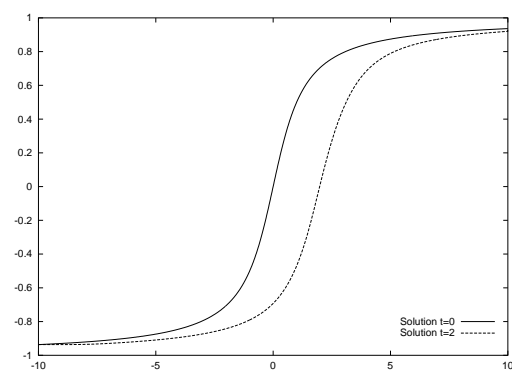


FIG. 39 – *Solutions à $t = 0$ (1000 nœuds) et $t = 2$ (867 nœuds).*

Nous utilisons les linéarisations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) = \phi(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}}) \\ \quad + \psi'_u(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}})(u_j^{n+\theta_j} - u_j^n) \\ \quad + \psi'_v(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}})(u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}} - u_{j+1}^n), \forall j \notin \{i-1, i\} \\ \mathcal{F}(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^*, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = \phi(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) + \psi'_u(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}})(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_{i-1}^n) \\ \quad + \psi'_v(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}})(u_i^* - u_i^n), \\ \mathcal{F}(u_i^*, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) + \psi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^* - u_i^n) \\ \quad + \psi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n), \end{array} \right.$$

où ϕ est la fonction de flux numérique de Godunov (11) et la fonction ψ est soit la fonction de flux numérique de Engquist-Osher, soit la version entropique du flux de Roe.

Comme pour l'advection, nous décidons de la suppression de la cellule \mathcal{C}_i^n à l'instant t^{n+1} si $|u_i^n - u_{i-1}^n| < \varepsilon$ et $|u_i^n - u_{i+1}^n| < \varepsilon$. Nous utilisons également la version implicite du schéma écrit ci-dessus. La Figure 40 représente un choc à $t = 0$ et $t = 2$. La figure 41 montre une détente aux mêmes instants.

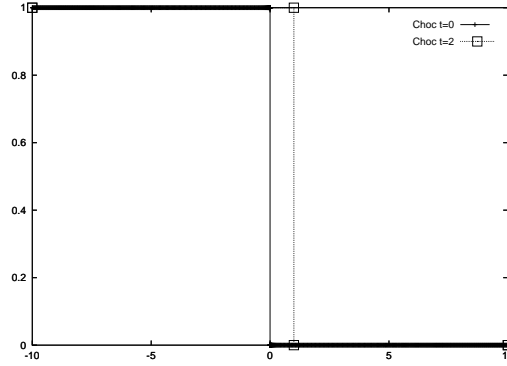
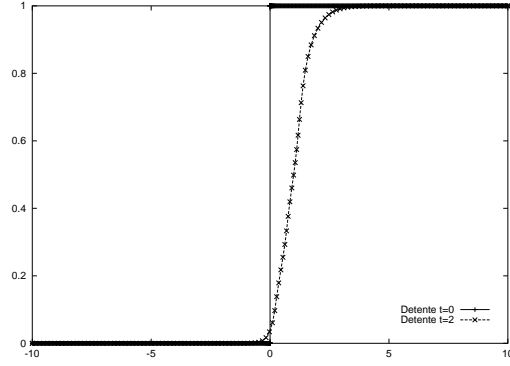


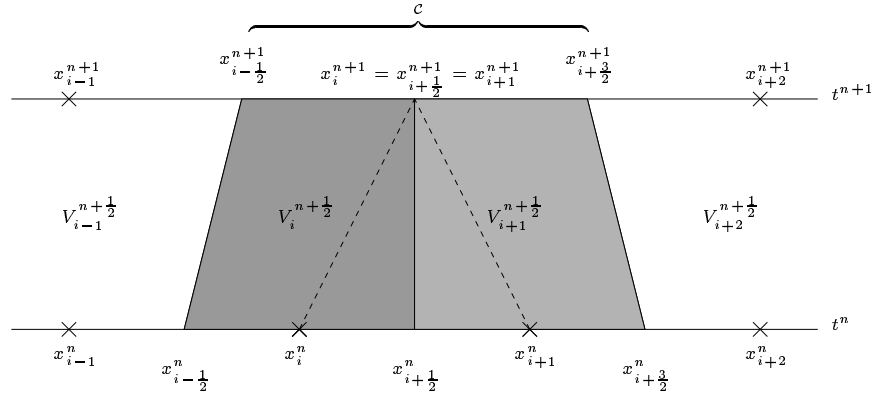
FIG. 40 – Chocs à $t = 0$ (1000 *nœuds*) et $t = 2$ (4 *nœuds*).

Nous nous interrogeons ici sur la généralisation d'une telle méthode aux dimensions supérieures. Comme pour l'addition, nous pensons qu'il est plus naturel de gérer, en deux et trois dimensions, la fusion de sommets que la fusion d'interfaces, comme nous l'avons présentée ci-dessus. Nous proposons donc une approche différente où la soustraction naît de la rencontre de deux sommets à l'instant t^{n+1} , schématisée en la Figure 42. Une différence avec la première optique est que $\Delta x_j^{n+1} \neq 0 \forall j$. Nous pouvons ainsi appliquer le schéma (7-8-9) comme il est écrit dans la première section. Il nous reste finalement à fusionner les cellules \mathcal{C}_i^{n+1} et \mathcal{C}_{i+1}^{n+1} en une seule, notée \mathcal{C} , de mesure $\Delta x = \Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}$, sur laquelle

FIG. 41 – *Détentes à $t = 0$ (1000 nœuds) et $t = 2$ (138 nœuds).*

nous approchons la moyenne de la solution par

$$u = \frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}}.$$

FIG. 42 – *Fusion de deux sommets.*

A première vue, cette démarche s'apparente plus à la soustraction "classique", décrite au début de la section, qu'à l'approche précédemment proposée. Néanmoins, nous nous sommes limités ici à la fusion de deux sommets. Rien ne nous empêche de considérer la fusion de M sommets $x_{i_1}^n, \dots, x_{i_M}^n$ où $M \geq 2$. Par exemple, situons-nous dans le cadre de la Figure 43 ($M = 3$), où les sommets x_{i-1}^n , x_i^n et x_{i+1}^n se rencontrent à l'instant t^{n+1} pour n'en former qu'un seul. La géométrie du maillage ainsi obtenue est semblable à la géométrie du maillage, représenté sur la Figure 36. Nous appliquons donc exactement le schéma (25) avec (26) et

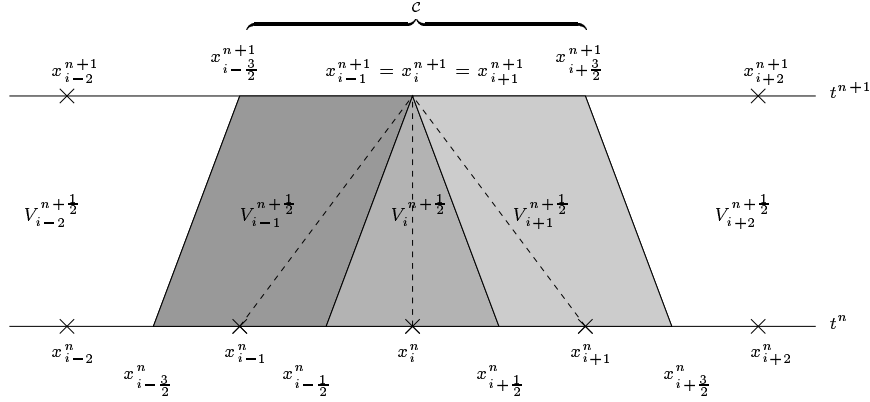


FIG. 43 – Fusion de trois sommets.

retrouvons la contrainte (24). Une étape supplémentaire réside dans la fusion des cellules \mathcal{C}_{i_j} pour $j = 1, \dots, M$ en une seule, notée \mathcal{C} , de mesure

$$\Delta x = \sum_{j=1}^M \Delta x_{i_j}^{n+1} = \Delta x_{i_1}^{n+1} + \Delta x_{i_M}^{n+1} ,$$

sur laquelle nous approchons la moyenne de la solution par

$$u = \frac{\Delta x_{i_1}^{n+1} u_{i_1}^{n+1} + \Delta x_{i_M}^{n+1} u_{i_M}^{n+1}}{\Delta x_{i_1}^{n+1} + \Delta x_{i_M}^{n+1}} .$$

5 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons présenté et implémenté différentes approches d'adaptation dynamique de maillage, complémentaires au schéma numérique étudié dans [23] et qui, par ailleurs, a fait l'objet de la première section. Parmi ces dernières, nous distinguons le maillage mobile adaptable, l'addition et la soustraction dynamiques de nœuds. Nous avons également profité de ce rapport pour rappeler certaines propriétés du schéma comme son caractère TVD pour l'équation d'advection, ainsi que les fondements d'un schéma implicite linéarisé pour l'équation de Burgers. Toutefois, pour ce dernier, le schéma implicite appliqué à la simulation d'un choc, exhibe des instabilités. Il nous reste à comprendre le pourquoi de ce phénomène. D'autre part, nous avons veillé à ce que les procédures soient adaptables aux dimensions supérieures. Une prochaine étape de notre travail consistera en l'obtention d'un code en deux dimensions pour les équations d'advection et d'Euler.

Références

- [1] J.T. Batina. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA J.*, 28:1381–1388, August 1990.
- [2] F. Benkhaldoun, T. Fernandez, B. Larroturou, and P. Leyland. A dynamical adaptive method based on local refinement and unrefinement for triangular finite-element meshes: preliminary results. Technical Report RR-1271, INRIA, July 1990.
- [3] M.J. Berger and A. Jameson. Automatic adaptative grid refinement for the euler equations. *AIAA J.*, 23(4):561–568, April 1985.
- [4] M.J. Berger and J. Oliger. Adaptative mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *J. Comput. Phys.*, 53:483–512, 1984.
- [5] R Biswas and R. Strawn. A new procedure for dynamic adaptation of three-dimensional unstructured grids. *Appl. Numer. Math.*, 13(6):437–452, 1994.
- [6] F.J. Blom. Considerations on the spring analogy. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 32:647–668, 2000.
- [7] M.J. Castro Diaz, F. Hecht, and B. Mohammadi. New progress in anisotropic grid adaptation for inviscid and viscous flows simulations. Technical Report RR-2671, INRIA, October 1995.
- [8] E.A. Dorfi and L. O’C. Drury. Simple adaptative grids for 1-d initial value problems. *J. Comput. Phys.*, 69:175–195, 1987.
- [9] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, and M. Lesoinne. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 163:231–245, 1998.
- [10] R.M. Furzeland, J.G. Verwer, and P.A. Zegeling. A numerical study of three moving-grid methods for one-dimensional partial differential equations which are based on the method of lines. *J. Comput. Phys.*, 89:349–388, 1990.
- [11] P.A. Gnoffo. A finite volume, adaptative grid algorithm applied to planetary entry flowfields. *AIAA J.*, 21(9):1249–1254, September 1983.
- [12] H. Guillard and C. Farhat. On the significance of the gcl for flow computations on moving meshes. In *AIAA 7th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada*, January 11-14 1999. AIAA paper 99-0793.
- [13] A. Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357–393, 1983.
- [14] A. Harten, J. M. Hyman, and P. D. Lax. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2(29):297–322, 1976.
- [15] A. Harten and J.M. Hyman. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 50:235–269, 1983.
- [16] W. Huang, Y. Ren, and R.D. Russell. Moving mesh partial differential equations (mmpdes) based on the equidistribution principle. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(3):709–730, June 1994.

- [17] W. Huang and R.D. Russell. Analysis of moving mesh partial differential equations with spatial smoothing. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(3):1106–1126, June 1997.
- [18] W. Huang and R.D. Russell. Adaptative mesh movement - the mmpde approach and its applications. *J. Comput. Appl. Math.*, 128:383–398, 2001.
- [19] M. Lesoinne and C. Farhat. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 134:71–90, 1996.
- [20] S. Li and L. Petzold. Moving mesh methods with upwinding schemes for time-dependent pdes. *J. Comput. Phys.*, 131:368–377, 1997.
- [21] R. Löhner and Baum J.D. Adaptative h-refinement on 3d unstructured grids for transient problems. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 14:1407–1419, 1992.
- [22] N. Maman. *Algorithmes d'adaptation dynamique de maillages en éléments finis. Application à des écoulements réactifs instationnaires*. PhD thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1992.
- [23] M. Mériaux and S. Piperno. Méthodes de volumes finis en maillages variables pour des équations hyperboliques en une dimension. Technical Report RR-4042, INRIA, November 2000.
- [24] B. Palmerio. A consistent ale-rezoned mesh adaptation algorithm for compressible flow finite-element calculations. Technical Report RR-0829, INRIA, April 1988.
- [25] B. Palmerio. An attraction-repulsion mesh adaptation model for flow solution on unstructured grids. *Computers Fluids*, 23(3):487–506, 1994.
- [26] S. Piperno. Schémas tvd d'ordre élevé pour la résolution de l'équation de burgers. Technical Report 96-49, CERMICS, January 1996.
- [27] J.M. Stockie, J.A. Mackenzie, and Russell R.D. A moving mesh method for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(5):1791–1813, 2001.
- [28] M.G. Vallet. Génération de maillages anisotropes adaptés - application à la capture de couches limites. Technical Report RR-1360, INRIA, December 1990.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399